OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XI-a

Barem de corectare

Problema 1

Înlocuind pe n în relația de recurență obținem :

$a_2 = \frac{1}{3}a_1 + 2$

$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + 2$

$a_4 = \frac{1}{3}a_3 + 2$

…

$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + 2$. **(2p)**

Înmulțim relațiile anterioare cu 1, 3, 3^2, … , respectiv 3^{n-2} și le adunăm. Obținem :

$3^{n-2}a_n = \frac{1}{3} + 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2})$. **(2p)**

Efectuăm calculele și în final obținem $a_n = 3 - \frac{2}{3^{n-2}} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. **(2p)**

Ca urmare limita șirului este 3. **(1p)**

Problema 2

a) Evident $A^kB = BA^k \ \forall k \in \mathbb{N}^*$ (1)**(1p)**

Inducție matematică după $p \in \mathbb{N}^*$: p=1 evident

Dacă $(AB)^k = A^kB^k$ atunci $(AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = ABA^kB^k$.**(1p)**

Folosind relația (1) rezultă $(AB)^{k+1} = AA^kBB^k = A^{k+1}B^{k+1}$. **(2p)**

b) Din ipoteză rezultă $A^{2013}B = O_n$.**(1p)**

Din a) avem $(AB)^{2013} = A^{2013}B^{2013} =$ **(1p)**

$= A^{2013}BB^{2012} = O_n$.**(1p)**

Problema 3

Din ipoteză rezultă $A^2B^2 = I_n$, $A^2B = A$, $AB^2 = B$. **(1p)**

Ca urmare $(A^2 + A + I_n)(B^2 + B + I_n) = A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n$. **(2p)**

$det(A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n) = det(A^2 + A + I_n) \cdot det(B^2 + B + I_n)$ (1) **(1p)**

Știm că $det(A^2 + A + I_n) = det\left[\left(A + \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \frac{3}{4}I_n\right] =$

$= det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right) \cdot \overline{det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)} =$

$= \left|det\left(A + \frac{1}{2}I_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)\right|^2 \geq 0$ (2) **(2p)**

Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia. **(1p)**

Problema 4

a) f neconstantă $\Rightarrow \exists$ a,b $\in \mathbb{R}$ cu $f(a) \neq f(b)$

Alegem șirurile $x_n=a+nT$, $y_n=b+nT$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde T>0 este perioada lui f **(1p)**

Avem $x_n \to \infty$, $f(x_n) = f(a) \to f(a)$

$y_n \to \infty$, $f(y_n) = f(b) \to f(b)$ **(1p)**

Deci nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. **(1p)**

b) Fie $T_1>0$ și T_2 perioade pentru f, respectiv g

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T_2)-f(x)=f(x+T_2+nT_1)-g(x+T_2+nT_1)+g(x+T_2+nT_1)-f(x+nT_1)=$

$=[f(x+T_2+nT_1)-g(x+T_2+nT_1)]+[g(x+nT_1)-f(x+nT_1)]$ **(2p)**

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ și folosind ipoteza obținem $f(x+T_2)-f(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ **(1p)**

În concluzie f și g au aceeași perioadă și conform punctului a) $\Rightarrow$ $f(x)-g(x)=constant=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. **(1p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com