Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a IX a

1. a) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+[y]=5,3 \\ [x]+y=4,2 \end{cases}$,

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Gazeta Matematică, supliment 10/2013

b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care egalitatea

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{1}{n}$$ este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$,

unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a

Lucian Dragomir, ViitoriOlimpici.ro 2013

2. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea că

$$f(a+b)\geq f(a)+f(b),\ \ \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

(i) Arătaţi că există $f\in\mathcal{F}$ cu $f(0)\neq 0$.

(ii) Demonstraţi că, dacă $f\in\mathcal{F}$ şi $f(1)=|f(-1)|=1$, atunci $f(0)=0$ şi $f(2)=2$.

* * *

3. Determinaţi numerele întregi x,y,n pentru care sunt adevărate egalităţile

$$x+y=2^n \text{ şi } x^2+y^2=n^3.$$

Lucian Dragomir

4. Se consideră un triunghi oarecare ABC şi punctele $M\in(BC), N\in(CA), P\in(AB)$ astfel încât $BM=MC, AN=2\cdot NC$ şi $AP=3\cdot PB.$ Dacă T este mijlocul lui (AC) şi R este simetricul lui M faţă de N , arătaţi că punctele P,T,R sunt coliniare.

Gazeta Matematică 3/2013

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.