



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a XII – a

SUBIECTUL I (7 p)

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " $\circ$ " prin $x \circ y = 3 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 6 \cdot y + 10$.

- a) Să se determine numărul real a astfel încât legea de compoziție " $\circ$ " definește pe mulțimea $\mathbb{R} - \{a\}$ o structură de grup abelian.
- b) Să se calculeze $x^{(n)}$, unde $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât (m, ∞) să fie parte stabilă în raport cu legea " $\circ$ ".

SUBIECTUL II (7 p)

Fie șirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1 \right)$.

G. M. nr. 12/2013

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se demonstreze că dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$, $(\forall) x, y \in G$ și $(xy)^n = (yx)^n$, $(\forall) x, y \in G$, atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

SUBIECTUL IV (7 p)

Să se calculeze $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$, $x \in [0, 2\pi]$.

NOTĂ: Timp de lucru – 3 ore