



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 24 februarie 2019

BAREM -clasa a XII-a

- 1) a) Se verifică direct 2 p.
 b) Elementul neutru este $A(-1)$ 1 p.
 Simetricul elementului $A(n)$ este $A(-n-2)$ 1 p.
 $A(kt-1) \cdot (A(pt-1))' = A((k-p)t-1)$ 1 p.
 c) $f: G \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(A(k)) = k+1$ 1 p.
 f izomorfism 1 p.
- 2) a) $e \in G_p$ 1 p.
 $x \in G_p \Rightarrow x^{-1} \in G_p$ 1p.
 Dacă $x \in G_p$ și $x = x^{-1}$, atunci $x^2 = e$, de unde $x = x^{p+1} = e$, deci G_p este o reuniune a
 lui $\{e\}$ cu mulțimi disjuncte de forma $\{x, x^{-1}\}$, $x \neq e$
 b) Dacă $G_2 = \{e, a, b\}$ și $ab = ba$, atunci $a, b \in G_2$ și $ab \neq e$, a, b - contradicție -, iar
 dacă $ab \neq ba$, atunci $aba \in G_2$ și $aba \neq e, a, b$ - contradicție
 Un exemplu pentru care G_2 are 4 elemente este grupul lui Klein 1 p.

3) a) Fie $G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $G(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Se demonstrează că G derivabilă pe $\mathbf{R}$ 2 p.

$$G' = f + h, \text{ unde } h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f = G' - h$, h continuă $\Rightarrow f$ admite primitive 2 p.

b) Un exemplu este $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2 p.$$

c) Un exemplu este $f : [-1,1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ p.}$$

4) a) $F''(x) = (f''(x) + 2f'(x) + f(x))e^x \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow F$ convexă 2 p.

$g(x) = e^x f(x) - x, \quad g'' = F'' \geq 0$, deci g' crescătoare. Din $g'(0) = e^0(f(0) + f'(0)) - 1 = 0$ 2 p.
deducem că $g' \geq 0$ pe $[0, \infty)$ și $g' \leq 0$ pe $(-\infty, 0]$, deci 0 este punct de minim al funcției g ,
iar valoarea minimă este $g(0) = 0$

b)

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \geq \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx, \quad n \in \mathbf{N}^* \dots\dots\dots 1 \text{ p.}$$

$$\int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{e} \left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots\dots\dots - \frac{1}{(n+1)!} \right) \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

