

Soluții și bareme orientative

Clasa a IX-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică, atunci notându-le cu $b - r, b, b + r$ trebuie ca $(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2 \Rightarrow b = 4r$, deci ele vor fi $3r, 4r, 5r, r \in \mathbb{N}$. (2p)

b) Fie $a < b < c$ cele trei numere. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = kabc$. Înlocuind $b = \frac{a+c}{2}$ și împărțind cu $a + c$ obținem $a^2 - ac + c^2 + \frac{(a+c)^2}{8} = k \cdot \frac{ac}{2} \Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2(2k+3) \cdot \frac{a}{c} + 9 = 0$. Deoarece $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}_+$, trebuie ca discriminantul redus să fie pătrat perfect. Acesta fiind par, există $l \in \mathbb{N}$, astfel ca $\Delta = (2k+3)^2 - 81 = (2l)^2$, adică $(2k+3-2l)(2k+3+2l) = 81$. (2p)

Avem de tratat trei cazuri:

Cazul I. $\begin{cases} 2k+3-2l=1 \\ 2k+3+2l=81 \end{cases}$, conduce la $k=19$. Ecuația de gradul al II-lea se scrie: $9a^2 - 82ac + 9c^2 = 0$. Cum $a < c \Rightarrow c = 9a, (a, c) = 1 \Rightarrow a = 1, c = 9$, deci $b = 5$. (1p)

Cazul II. $\begin{cases} 2k+3-2l=3 \\ 2k+3+2l=27 \end{cases}$, conduce la $k=6$.

Analog, se găsește soluția $a = 1, b = 2, c = 3$.

Cazul III. $\begin{cases} 2k+3-2l=9 \\ 2k+3+2l=9 \end{cases}$, conduce la $k=3$. Ecuația de gradul al II-lea se scrie: $9a^2 - 18ac + 9c^2 = 0$, adică $a = c$, ceea ce nu convine. (2p)

2. Avem:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} < \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} + \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} + \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} = 3 \quad (1) . \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2y+3z) \cdot 1} &\leq \frac{x+2y+3z+1}{2}, \\ \sqrt{(2x+3y+z) \cdot 1} &\leq \frac{2x+3y+z+1}{2}, \\ \sqrt{(3x+y+2z) \cdot 1} &\leq \frac{3x+y+2z+1}{2}. \end{aligned} \quad (2p)$$

Deci:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \geq 2 \left(\frac{1}{x+2y+3z+1} + \frac{1}{2x+3y+z+1} + \frac{1}{3x+y+2z+1} \right) (*). \quad (1p)$$

Folosind: $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3^2, \forall a, b, c > 0 (**)$, deducem

$$\begin{aligned} &2 \left(\frac{1}{x+2y+3z+1} + \frac{1}{2x+3y+z+1} + \frac{1}{3x+y+2z+1} \right) \geq \\ &\geq 2 \cdot \frac{1}{(x+2y+3z+1) + (2x+3y+z+1) + (3x+y+2z+1)} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6(x+y+z)+3} = \frac{2}{6+3} = 2. \end{aligned}$$

În concluzie: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \geq 2 \quad (2).$

Din (1), (2) rezultă concluzia:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \in [2, 3). \quad (2p)$$

3. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} - p\sqrt{3} = p\sqrt{b} - q\sqrt{a}$. Prin ridicare la pătrat se obține: $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = bp^2 + aq^2 - 2pq\sqrt{ab}$. Cu notația $n = \frac{bp^2 + aq^2 - 2q^2 - 3p^2}{2pq} \in \mathbb{Q}$, relația se rescrie: $\sqrt{ab} = n + \sqrt{6}$, (*). (3p)

Prin ridicare la pătrat se obține: $ab = n^2 + 2n\sqrt{6} + 6$.

Dacă $n \neq 0 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{ab - n^2 - 6}{2n} \in \mathbb{Q}$, fals. Rezultă $n = 0$ și conform relației (*) se obține: $ab = 6, a, b \in \mathbb{N}$. (2p)

Distingem cazurile:

i) $a = 1$ și $b = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$;

ii) $a = 2$ și $b = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \notin \mathbb{Q}$;

iii) $a = 3$ și $b = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$;

iv) $a = 6$ și $b = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

În concluzie $a = 3$ și $b = 2$. (2p)

4.a) $N \in (BM)$ și $\overrightarrow{BM} = 4 \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BN} = 3 \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NM}} = -\frac{1}{3}$. (1p)

Dacă arătăm că există $\lambda \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\overrightarrow{AN} = \lambda \cdot \overrightarrow{AP}$, atunci vectorii $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AP}$ sunt coliniari, deci punctele A, N și P sunt coliniare. (1p)

Deoarece $\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NM}} = k = -\frac{1}{3}$, atunci

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AC}. \quad (1p)$$

Deoarece $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{1}{6}$, avem $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{7} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{6}{8} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \frac{8}{7} \cdot \overrightarrow{AN}$.

Deci există $\lambda = \frac{7}{8}$, astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8} \cdot \overrightarrow{AP}$. (1p)

b) $PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}} = -6$, conform teoremei lui **Thales**. (1p)

Deoarece M este mijlocul lui (AC) , avem

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{AM}} = -1 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{AM}} \cdot \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-6) = -1. \quad (1p)$$

Conform reciprocei teoremei lui **Ceva**, dreptele AP, BM și CQ sunt concurente. (1p)