

Barem clasa a IX-a

1. $\left[\sqrt{x} \right] = \frac{2015}{x} - 1$ deci $\frac{2015}{x} \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{N}^*$ rezultă x divizor al lui 20152p

Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Prin verificări se constată că dintre divizori verifică $x = 5 \cdot 31 = 155$. Deci $x = 155$ 5p

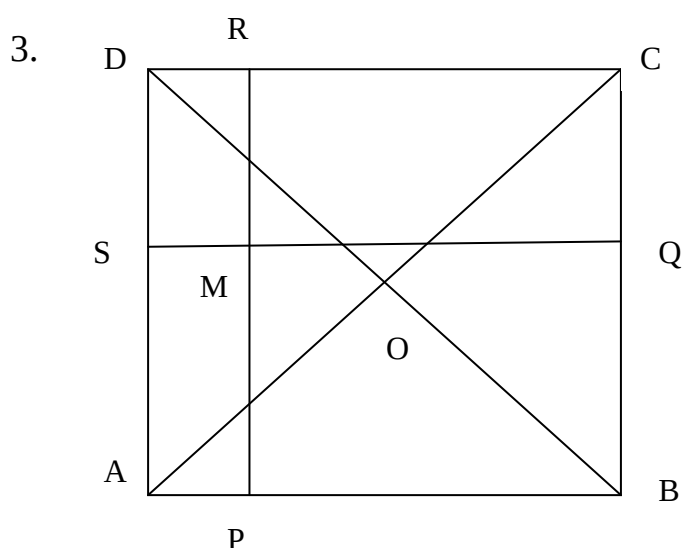
2. a) $a_n = 2n + 1$ este pătrat perfect, va rezulta că este pătratul unui număr impar. Dacă $2n + 1 = (2k + 1)^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $n = 2k^2 + 2k$, care este număr par, deci propoziția este adevărată.....3p

b) Dacă $6n - 5 = p^2$, $p \in \mathbb{N}$, va rezulta că p este impar, de forma $p = 6k + 1$ sau $p = 6k + 5$ deoarece $(6k + 3)^2 = 6q + 9 = 6(q + 1) + 3$, $q \in \mathbb{N}$, iar $(6k + 1)^2 = 6t + 1 = 6(t + 1) - 5$, $(6k + 5)^2 = 6r + 25 = 6(r + 5) - 5$.

Pentru $p = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, se obține $6n - 5 = (6k + 1)^2$ de unde rangul n este $n = 6k^2 + 2k + 1$, care este impar

Pentru $p = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ se obține $6n - 5 = (6k + 5)^2$, de unde $n = 6k^2 + 10k + 5$ care este număr impar. Așadar propoziția este adevărată.....2p

- c) Dacă am avea $a_{2s-1} = (2p)^2$, ar rezulta $\underbrace{2015 + (2s - 2)r}_{\text{impar}} = \underbrace{(2k)^2}_{\text{par}}$, fals, deci propoziția este falsă.....2p



a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

Prin adunarea acestor egalități, ținând cont de relațiile

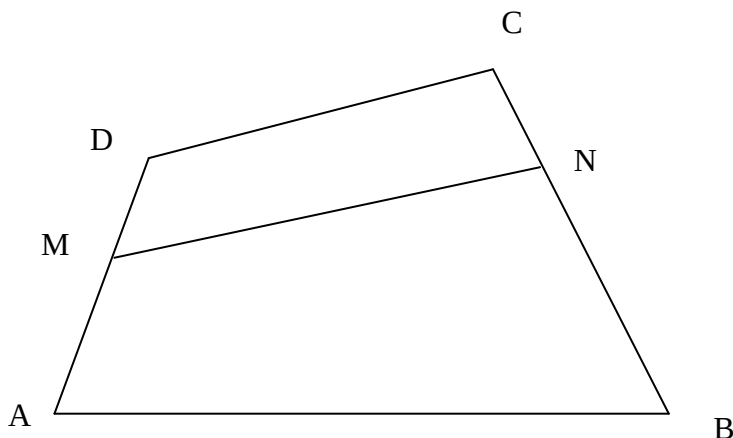
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ și}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

rezultă relația.3p

b) Se formează dreptunghiurile $MSDR$ și $MPBQ$. Rezultă $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MD}$, deci $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{MO} \dots\dots\dots 4p$

4.



Rezultă:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \dots\dots\dots 3p$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{DC} &= (2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NB}) + (4\overrightarrow{DM} + 4\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{NC}) = \\ &= (2\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{DM}) + 6\overrightarrow{MN} + (2\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC}) = 6\overrightarrow{MN}, \text{ deoarece } 2\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{DM} = \\ &= 2(\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DM}) = \vec{0} \text{ și } 2\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = 2(\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Rezultă $\overrightarrow{MP} = 6\overrightarrow{MN}$, deci punctele M, N, P sunt coliniare.....4p

Observație. Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.