BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2019}$ sunt invers proporţionale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2019}$ şi

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 ... + a_{2019} = 2020^2$

a) (4p) Determinaţi numerele naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2019}$.

b) (3p) Calculaţi suma $S = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + ... + \frac{1}{a_{2018} \cdot a_{2019}}$.

Prof. Ciobîcă Constantin

<u>**Soluție:**</u> **a)** $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = ... = \frac{a_{2019}}{2019} = k \Rightarrow a_1 = k, a_2 = 2k, ..., a_{2019} = 2019k$

$a_1 + a_3 + ... + a_{2019} = k + 3 \cdot k + 5 \cdot k + ... + 2019 \cdot k = k \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 2019)$

$1 + 3 + 5 + ... + 2019 = 1 + 2 + 3 + ... + 2019 - (2 + 4 + ... + 2018) =$

$= 2019 \cdot (2019 + 1) : 2 - 2(1 + 2 + 3 + ... + 1009) = 2019 \cdot 1010 - 1009 \cdot 1010 = 1010^2$.

$\Rightarrow k \cdot 1010^2 = 2020^2 \Rightarrow k = 4$, deci $a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 12, ..., a_{2019} = 8076$

b) $S = \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + ... + \frac{1}{8072 \cdot 8076} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{2018 \cdot 2019} \right) =$

$= \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2019} \right) = \frac{1009}{16152}$

<u>**Barem:**</u>

a)	$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = ... = \frac{a_{2019}}{2019} = k \Rightarrow a_1 = k, a_2 = 2k, ..., a_{2019} = 2019k$	**1p**
	$a_1 + a_3 + ... + a_{2019} = k + 3 \cdot k + 5 \cdot k + ... + 2019 \cdot k = k \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 2019)$	**1p**
	$1 + 3 + 5 + ... + 2019 = 1 + 2 + 3 + ... + 2019 - (2 + 4 + ... + 2018) =$ $= 2019 \cdot (2019 + 1) : 2 - 2(1 + 2 + 3 + ... + 1009) = 2019 \cdot 1010 - 1009 \cdot 1010 = 1010^2$	**1p**
	$\Rightarrow k \cdot 1010^2 = 2020^2 \Rightarrow k = 4$ deci $a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 12, ..., a_{2019} = 8076$	**1p**
b)	$S = \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + ... + \frac{1}{8072 \cdot 8076} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{2018 \cdot 2019} \right) =$	**1p**
	$= \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2019} \right) = \frac{1009}{16152}$	**2p**

2. a) (2p) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza zece, astfel încât $a + b = 10$ și $\left[\sqrt{\overline{ab}} \right] = 6$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

b) (5p) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza zece cu cifre distincte, astfel încât $a\cdot b=c$ și $n=\sqrt{\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}-\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}\right)-\left(a+b+c\right)}$ să fie număr natural.

Gazeta Matematică

<u>Soluție:</u> a) $\left[\sqrt{\overline{ab}}\right]=6\Rightarrow 6\le\sqrt{\overline{ab}}<7\Rightarrow 36\le\overline{ab}<49$. Cum $a+b=10$, avem $\overline{ab}\in\{37,46\}$.

b) Prin calcul $n=3\sqrt{11(a+b+c)}$. Cum $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a+b+c=11k^2, k\in\mathbb{N}$. Deoarece *a, b, c* sunt cifre distincte avem: $a+b+c\le 24$, deci $a+b+c=11\Leftrightarrow a+b+ab=11\Leftrightarrow(a+1)(b+1)=12$. Cum *a, b* sunt cifre, $a\ne 0\Rightarrow(a,b)\in\{(1,5);(2,3);(3,2);(5,1)\}$. Având în vedere că $a\cdot b=c$, iar *a, b, c* sunt cifre distincte avem: $\overline{abc}\in\{236;326\}$.

<u>Barem</u>:

a)	$\left[\sqrt{\overline{ab}}\right]=6\Rightarrow 6\le\sqrt{\overline{ab}}<7\Rightarrow 36\le\overline{ab}<49$	**1p**
	Cum $a+b=10$, avem $\overline{ab}\in\{37,46\}$.	**1p**
b)	$n=3\sqrt{11(a+b+c)}$	**1p**
	$n\in\mathbb{N}\Rightarrow a+b+c=11k^2, k\in\mathbb{N}$ Deoarece *a, b, c* sunt cifre distincte avem: $a+b+c\le 24$, deci $a+b+c=11$	**1p**
	$a+b+c=11\Leftrightarrow a+b+ab=11\Leftrightarrow(a+1)(b+1)=12$	**1p**
	Cum *a, b* sunt cifre, $a\ne 0\Rightarrow(a,b)\in\{(1,5);(2,3);(3,2);(5,1)\}$.	**1p**
	Având în vedere că $a\cdot b=c$, iar *a, b, c* sunt cifre distincte avem: $\overline{abc}\in\{236;326\}$.	**1p**

3. (7p) Se consideră triunghiul ΔABC, $AB<AC<BC$ și *M* mijlocul laturii (*BC*). Notăm cu *D* intersecția dintre dreptele *AF* și *BE*, unde *E* este simetricul lui *B* față de dreapta *AM*, iar *F* este simetricul lui *A* față de *M*. Arătați că patrulaterul *AECF* este trapez isoscel.

prof. Gheorghe Iacoviță

<u>Soluție</u>:
În patrulaterul *ABFC* diagonalele se înjumătățesc $\Rightarrow$ *ABFC* este paralelogram $\Rightarrow$ *AB = CF* (1);
AF - mediatoarea segmentului [*BE*] $\Rightarrow$ *AB = AE* (2); din (1) și (2) $\Rightarrow$ *AE = CF* (3); [*DM*] este linie mijlocie în triunghiul $\Delta BEC\Rightarrow MD\,//\,CE\Rightarrow AF\,//\,CE$ (4); din (3) și (4) $\Rightarrow$ *AECF* trapez isoscel.

<u>Barem</u>:

Figura	**1p**
ABFC este paralelogram $\Rightarrow$ *AB = CF*	**1p**
AF - mediatoarea segmentului [*BE*] $\Rightarrow$ *AB = AE*	**1p**
AE = CF	**1p**
[*DM*] este linie mijlocie în triunghiul $\Delta BEC\Rightarrow MD\,//\,CE$	**1p**
Finalizare	**2p**

4. Se consideră paralelogramul *ABCD* cu $m(\sphericalangle DAB)<90°$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAB$ intersectează *BD* în *M*, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ intersectează *AC* în *N*. Arătați că:
a) (3p) $DM\cdot NC=AN\cdot MB$;
b) (4p) patrulaterul *ANMD* este trapez ortodiagonal.

Prof. Tamara Brutaru

Soluție:

a) În $\Delta ADB, [AM$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB$, conform teoremei bisectoarei avem: $\frac{DM}{MB}=\frac{AD}{AB}$ (1).

În $\Delta ADC, [DN$ este bisectoarea $\sphericalangle ADC$, conform teoremei bisectoarei avem: $\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DC}$ (2).

Cum *ABCD* paralelogram avem *AB=DC*, iar din (1) și (2) rezultă $\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow$ $DM\cdot NC=AN\cdot MB$.

b) Cum $\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{DM}{DM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{DM}{DB}=\frac{AN}{AC}$ (3). Dacă O este intersecția diagonalelor paralelogramului *ABCD*, atunci *DB=2DO* și *AC=2AO*. Din (3) avem $\frac{DM}{DO}=\frac{AN}{AO}\Rightarrow\frac{DM}{DO-DM}=\frac{AN}{AO-AN}\Rightarrow\frac{DM}{MO}=\frac{AN}{NO}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales în $\Delta ADO\Rightarrow MN\parallel AD$ (4).

Cum ABCD paralelogram avem $m(\sphericalangle DAB)+m(\sphericalangle ADC)=180°$, iar $[AM$ bisectoarea $\sphericalangle DAB\Rightarrow m(\sphericalangle DAM)=\frac{m(\sphericalangle DAB)}{2}$, $[DN$ bisectoarea $\sphericalangle ADC\Rightarrow m(\sphericalangle ADN)=\frac{m(\sphericalangle ADC)}{2}$, deci $m(\sphericalangle DAM)+m(\sphericalangle ADN)=90°\Rightarrow m(\sphericalangle AED)=90°$, unde $AM\cap DN=\{E\}$. Din (4) și $AM\perp DN\Rightarrow$ *ANMD* trapez ortodiagonal.

Barem:

a)	În $\Delta ADB, [AM$ bisectoarea $\sphericalangle DAB$, conform th. bisectoarei avem: $\frac{DM}{MB}=\frac{AD}{AB}$ (1).	**1p**
	În $\Delta ADC, [DN$ bisectoarea $\sphericalangle ADC$, conform th. bisectoarei avem: $\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DC}$ (2).	**1p**
	Cum *ABCD* paralelogram avem *AB=DC*, iar din (1) și (2) rezultă $\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow$ $DM\cdot NC=AN\cdot MB$.	**1p**
b)	Cum $\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{DM}{DM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{DM}{DB}=\frac{AN}{AC}$ (3).	**1p**
	Dacă O este intersecția diagonalelor paralelogramului *ABCD*, atunci *DB=2DO* și *AC=2AO*. Din (3) avem $\frac{DM}{DO}=\frac{AN}{AO}\Rightarrow\frac{DM}{DO-DM}=\frac{AN}{AO-AN}\Rightarrow\frac{DM}{MO}=\frac{AN}{NO}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales în $\Delta ADO\Rightarrow MN\parallel AD$ (4), rezultă *ANMD* trapez.	**2p**
	Cum ABCD paralelogram avem $m(\sphericalangle DAB)+m(\sphericalangle ADC)=180°$, iar $[AM$ bisectoarea $\sphericalangle DAB\Rightarrow m(\sphericalangle DAM)=\frac{m(\sphericalangle DAB)}{2}$, $[DN$ bisectoarea $\sphericalangle ADC\Rightarrow m(\sphericalangle ADN)=\frac{m(\sphericalangle ADC)}{2}$, deci $m(\sphericalangle DAM)+m(\sphericalangle ADN)=90°\Rightarrow m(\sphericalangle AED)=90°$, unde $AM\cap DN=\{E\}$. Din (4) și $AM\perp DN\Rightarrow$ *ANMD* trapez ortodiagonal.	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.