Barem de corectare OML Clasa a XII-a, 2014

1. Injectivitate: $f\big((q_1,k_1)\big) = f\big((q_1,k_1)\big) \Rightarrow q_1 2^{k_1} = q_2 2^{k_2}$

   $\frac{q_1}{q_2} = 2^{k_2-k_1} \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$ și $q_1 = q_2$ 2p

   Surjectivitate 2p

   Morfism:

   $f\big((q_1,k_1) * (q_2,k_2)\big) = f(q_1.q_2; k_1 + k_2) = q_1 q_2 2^{k_1+k_2} =$

   $q_1 \cdot 2^{k_1} \cdot q_2 \cdot 2^{k_2} = f\big((q_1,k_1)\big) \cdot f\big((q_1,k_1)\big)$ 3p

2. Parte stabilă: $\forall x,y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$

   S_1) $x \in H \Leftrightarrow x^2 = e$, $y \in H \Leftrightarrow y^2 = e$

   Dacă $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e \cdot e \Rightarrow yx = xy$ este adevărată dacă și numai dacă G este grup comutativ 4p

S_2) $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

Analog dacă G este grup comutativ

Deci H nu este subgrup 3p

3)

a) Fie $g(x)=x^2 + 2\sin x + 1$, $g'(x)=2x+2\cos x$, $g''(x) = 2 - 2\sin x \geq 0 \Rightarrow g'$crescătoare ..2p

$\forall x \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 2 \Rightarrow g'(x) > 0$; $\forall x \geq 0$ $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$

Analog pentru x<0..1p

b) $(f(x) \cdot f'(x))' = 1 - \sin x$

$\int (f(x) \cdot f'(x))'dx = x + \cos x + C$, $f(x) \cdot f'(x) = x + \cos x + C \xRightarrow{x\to 0} f(0) \cdot f'(0) = \cos 0 + C$

$1 = 1 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \cos x$ 3p

$\int f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$, $\frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$

$x \to 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$, $f^2(x) = x^2 + 2\sin x + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 2\sin x + 1}$ 1p

4)

$f(x) - a \geq 0$, $f(x) - b \leq 0 \Rightarrow \left(f(x) - a\right) \cdot \left(f(x) - b\right) \leq 0$ 2p

$f^2(x) - (a+b) \cdot f(x) + ab \leq 0$, $f(x) - (a+b) + \frac{ab}{f(x)} \leq 0$

$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (a+b)dx + ab\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq 0$

$ab\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx - (a+b) \int_0^1 dx + \int_0^1 f(x)dx \leq 0$ 3p

$ab\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq a + b - k$, $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{a+b-k}{ab}$

Finalizare 2p