



Barem de notare și evaluare

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 8 februarie 2025

Clasa a XI-a

Subiectul 1	
Din $(\det(X))^2 = \det(X^2) = 25$ se obține $\det(X) = \pm 5$.	1p
Dacă $\det(X) = 5$, cu relația Cayley-Hamilton: $X^2 - \text{tr}(X) \cdot X + \det(X) \cdot I_2 = O_2$, rezultă $\text{tr}(X) \cdot X = X^2 + 5I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.	1p
Avem $\text{tr}(\text{tr}(X) \cdot X) = 4$, deci $(\text{tr}(X))^2 = 4$, adică $\text{tr}(X) = \pm 2$.	1p
În acest caz obținem soluțiile: $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
Dacă $\det(X) = -5$, în mod analog avem $\text{tr}(X) \cdot X = X^2 - 5I_2 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.	1p
Apoi, $\text{tr}(\text{tr}(X) \cdot X) = -16$, deci $(\text{tr}(X))^2 = -16$, de unde $\text{tr}(X) = \pm 4i$.	1p
În acest caz obținem soluțiile: $X_3 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix}$ și $X_4 = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ i & -3i \end{pmatrix}$.	1p
TOTAL	7p
soluție alternativă	
Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ și $X^2 = A$, atunci $X^3 = AX = XA$.	1p
Rezultă $\begin{pmatrix} a+4b & -8a-7b \\ c+4d & -8c-7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-8c & b-8d \\ 4a-7c & 4b-7d \end{pmatrix}$, apoi $X = \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$	1p
și $X^2 = \begin{pmatrix} 2c^2+4cd+d^2 & -4c^2-4cd \\ 2c^2+2cd & -2c^2+d^2 \end{pmatrix}$.	1p
$X^2 = A$ implică $\begin{cases} c^2+cd=2 \\ -2c^2+d^2=-7 \end{cases}$.	1p
Avem $7(c^2+cd)+2(-2c^2+d^2)=0 \Rightarrow 3c^2+7cd+2d^2=0 \Rightarrow 3\left(\frac{c}{d}\right)^2+7\cdot\frac{c}{d}+2=0$,	1p
de unde $\frac{c}{d} \in \left\{-\frac{1}{3}, -2\right\}$.	
Dacă $c = -2d$, obținem $c = \pm 2$ și $d = \mp 1$ și avem $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.	1p
Dacă $d = -3c$, obținem $c = \pm i$ și $d = \mp 3i$ și avem $X_3 = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix}$ și $X_4 = \begin{pmatrix} -i & -2i \\ i & -3i \end{pmatrix}$.	1p
TOTAL	7p

Subiectul 2	
a)	
Prin inducție matematică avem că $x_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1.$	3p
Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 1.$	1p
soluție alternativă	
Inductiv, se arată că $x_n \in (0,1), \forall n \geq 1.$	1p
Din inegalitatea mediilor rezultă $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \geq \sqrt[4]{x_n} \geq x_n \forall n \geq 1.$	1p
Deci $(x_n)_{n \geq 1}$ crescător și mărginit, de unde rezultă $(x_n)_{n \geq 1}$ convergent.	1p
Prin trecere la limită în relația de recurență obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$	1p
b)	
Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2}{2^{2n+2}}$	2p
Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n) = \frac{\pi^2}{8}.$	1p
TOTAL	7p

Subiectul 3	
a)	
Avem $0 = \det(M^n) = (\det(M))^n$, deci $\det(M) = 0.$	1p
Din egalitatea Cayley-Hamilton se obține $M^2 = \text{tr}(M) \cdot M$ și, în mod inductiv,	1p
$M^n = (\text{tr}(M))^{n-1} \cdot M.$	
Așadar $(\text{tr}(M))^{n-1} \cdot M = O_2$, ceea ce implică $\text{tr}(M) = 0$ sau $M = O_2$, ambele situații conducând la $M^2 = O_2.$	1p
b)	
Conform subpunctului a), $X^2 = Y^2 = O_2.$	1p
Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{Z}^*$ și $A^2 = O_2$. Rezultă $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}.$	
Întrucât $b \neq 0$, avem $a+d=0$, deci $d=-a$ și $c = -\frac{a^2}{b}$. Prin urmare,	1p
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, cu $b a^2.$	

Dacă alegem $X = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -m^2 & -m \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} n & 1 \\ -n^2 & -n \end{pmatrix}$, cu $m, n \in \mathbf{Z}^*$, rezultă $X - Y = \begin{pmatrix} m-n & 0 \\ n^2-m^2 & n-m \end{pmatrix} \text{ și } (X-Y)^2 = \begin{pmatrix} (m-n)^2 & 0 \\ 0 & (m-n)^2 \end{pmatrix}.$ Pentru $n=1+m$ avem $(X-Y)^2 = I_2$, deci $(X-Y)^{2006} = I_2$. Așadar, matricele $X = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -m^2 & -m \end{pmatrix} \text{ și } Y = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ -(1+m)^2 & -(1+m) \end{pmatrix} \text{ cu } m \in \mathbf{Z} \setminus \{0, -1\} \text{ verifică cerințele.}$	1p 1p
TOTAL	7p

Subiectul 4	
Dacă $x_1 > 0$, atunci $\ln(1+x_1) > \ln 1 = 0$, deci $x_2 = x_1 + \frac{1}{\ln(1+x_1)} > 0$. Procedând inductiv obținem: $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Rezultă $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\ln(n+x_n)} > 0, \forall n \geq 1$, ceea ce arată că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător. Presupunând prin absurd că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $x_n \leq M, \forall n \geq 1$. Avem $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\ln(n+x_k)} \geq \frac{1}{\ln(n+M)}, \forall k \geq 1$ și $\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\ln(n+M)}$, de unde obținem $x_n - x_1 \geq \frac{n-1}{\ln(n+M)}$. Prin trecere la limită, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Fals! Prin urmare, $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit și, întrucât $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Cu teorema Stolz-Cesaro avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+x_n)} = 0$. Apoi, din nou cu teorema Stolz-Cesaro, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n}}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+x_n)} \cdot \frac{\ln n \cdot \ln(n+1)}{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)} \right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+x_n)} \cdot \frac{\ln n \cdot \ln(n+1)}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \ln n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \ln n} \right) = 1.$	1p 1p 1p 1p 2p
TOTAL	7p