

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, 23 februarie 2020**BAREM** Clasa a V-a**Problema 1**

- a) Să se arate că oricum am alege 101 numere naturale, vor fi două cu aceleași ultime două cifre.
 b) Să se arate că oricum am alege 2020 de numere naturale, vor fi două a căror diferență este divizibilă cu 2019. Putem găsi numere din cele 2020 a căror sumă să fie divizibilă cu 2019?
 Argumentați răspunsul.

Ivanov Camelia

Ultimele două cifre reprezintă restul împărțirii unui număr natural la 100. Acele resturi sunt de la 0 la 99, adică 100 la număr. $101 = 100 + 1$, deci conform Principiului Dirichlet, vor exista cel puțin două numere cu același rest.	2P
$2020 = 2019 + 1$ Resturile împărțirii la 2019 sunt de la 0 la 2018, adică 2019 în total. Există cel puțin două numere care dau același rest la împărțirea cu 2019, deci diferența lor va da restul 0, adică este divizibilă cu 2019.	2P
Dacă vom nota $s_1 =$ primul număr, $s_2 =$ suma primelor două numere,, $s_k =$ suma primelor k numere, unde $k=1; 2020$, atunci vor exista cel puțin două sume s_k și $s_l, k \leq l$, care au diferența divizibilă cu 2019. Diferența lor este o sumă de $l-k$ numere dintre cele 2020 pentru $k \neq l$ sau zero pentru $k=l$, caz în care numerele căutate sunt cele k .	3P

Problema 2

- a) Să se calculeze numărul $x=31+32+\dots+70$
 b) Să se arate că nu există număr natural $n \geq 2$ pentru care $n^x = n^{x-1} + 2019$.

Anastasiu Liliana/.....

a) $x=(1+2+\dots+70) - (1+2+\dots+30)=2485 - 465=2020$ (sau $x=(31+70)40:2=2020$)	3P
b) $n^{2020} - n^{2019} = 2019, n^{2019}(n-1) = 2019$ $n^{2018} \cdot n \cdot (n-1) = 2019$ $n \cdot (n-1)$ este număr par, deci $n^{2018} \cdot n \cdot (n-1)$ este par Cum 2019 este impar rezultă nu există n număr natural care să satisfacă relația	1P
SAU, independent de punctul a) $n^x - n^{x-1} = 2019, n^{x-1}(n-1) = 2019$ $n^{x-2} \cdot n \cdot (n-1) = 2019$ $n \cdot (n-1)$ este număr par, deci $n^{x-1} \cdot n \cdot (n-1)$ este par Cum 2019 este impar rezultă nu există n număr	2P
	1P



	natural care să satisfacă relația	
--	-----------------------------------	--

Problema 3

- a) Calculați: $3^2 + 5^3 + 7^4$
 b) Arătați că numărul 2535^{1921} se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale: un pătrat perfect, un cub perfect și un număr la puterea patru.

Ftadeev Brad Adriana Floriana

a) $3^2 + 5^3 + 7^4 = 2535$	3P
b) $2535^{1921} =$ $= 2535^{1920} \cdot 2535 = 2535^{1920} \cdot (3^2 + 5^3 + 7^4) = 2535^{1920} \cdot 3^2 + 2535^{1920} \cdot 5^3 + 2535^{1920} \cdot 7^4 =$ $= 2535^{960 \cdot 2} \cdot 3^2 + 2535^{640 \cdot 3} \cdot 5^3 + 2535^{480 \cdot 4} \cdot 7^4 =$ $= (2535^{960} \cdot 3)^2 + (2535^{640} \cdot 5)^3 + (2535^{480} \cdot 7)^4.$	4P

Problema 4

- a) Se consideră numărul

$$N = 21 + 201 + 2001 + \dots + \underbrace{200\dots01}_{2020 \text{ cifre}}$$

Stabiliți câte cifre identice are numărul N.

- b) Determinați numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$ scris în baza 10, care verifică relația:

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + \overline{cba} = 2020.$$

Milea Daniela

a)	
$N = 2 \cdot 10 + 1 + 2 \cdot 10^2 + 1 + 2 \cdot 10^3 + 1 + \dots + 2 \cdot 10^{2019} + 1$	1P
$N = 2 (10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000 \dots 0}_{2019 \text{ zerouri}}) + 2019 = \underbrace{222 \dots 20}_{2020 \text{ cifre}} + 2019$	1P
$N = \underbrace{2222 \dots 224239}_{2020 \text{ cifre}} \Rightarrow \text{Sunt } 2020 - 3 = 2017 \text{ cifre identice}$	1P
b)	
$3^6 < 2020 < 3^7 \Rightarrow n \leq 6$	1P
$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = (3^{n+1} - 3) : 2 \Rightarrow n \geq 6$	
$n = 6$	1P
$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^6 = 1092$	1P
$2020 - 1092 = 928 \Rightarrow \overline{abc} = 829$	1P