



BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA- 24, FEBRUARIE 2019
CLASA a VIII-a

1. Se consideră numărul $x = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$.

a) Aratati ca $x^2 \in \mathbb{N}$.

b) Aflati partea intreață a numărului $a = (x-1)^{2019}$.

c) Calculati $(x^3 - 2x - 1)^{2011}$.

Solutie :

a) Se arată ca $x^2 = 2$

3 puncte

b) $0 \leq a < 1$ deci $[a] = 0$

2 puncte

c) $(x^3 - 2x - 1)^{2011} = -1$

2 puncte

2. Se da multimea $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^* / \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{6}{abc}\}$.

a) Scrieti un triplet $(a, b, c) \in A$.

b) Arătați ca $(a, -a, c) \notin A$ oricare ar fi a și c din $\mathbb{Q}^*$.

c) Arătați ca $a^2 + b^2 + c^2 \neq 6$, oricare ar fi a, b, c din A .

Solutie:

a) De exemplu $(6, 3, -\frac{4}{3})$

2 puncte

b) Prin R.A.

2 puncte

c) $ab + ac + bc = 6$ și $2ab + 2ac + 2bc = 12$. Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ și $2(a^2 + b^2 + c^2) = 12$ prin scădere se obține ca

$$a = b = c = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

3 puncte

3. Pe planul patrului ABCD se ridică perpendiculara $SA = AB = a\sqrt{3}$. Fie $M \in (BC)$ astfel încât $MC = a$.

a) Aratati ca $BD \perp SC$.

b) Aflati distanta de la S la MD.,

Solutie :

a) $BD \perp AC$, $\perp BD \perp (SAC)$ deci $BD \perp SC$.

$$BD \perp SA$$

3 puncte

b) $A_{AMD} = \frac{3a^2}{2}$.

1 punct

Fie $AP \perp MD$, $A_{AMD} = \frac{DM \cdot AP}{2}$. In $\triangle MCD$, $MD = 2a$ și $AP = 3a/2$.

1 punct

Din T.3.P. avem ca $SP \perp MD$ deci $d(S, MD) = SP$.

1 punct

Din T.P.avem ca $SP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

1 punct

4.Se considera tetraedrul ABCD in care $AC=AB+CD$. Fie [AE bisectoarea $\angle BAC$, $E \in BC$.Construim $BF \perp AE$, $F \in AE$.Fie $BF \cap AC = \{G\}$ si $CF \cap AB = \{P\}$.Paralela prin P la dreapta BD intersecteaza dreapta AD in Q.Notam $CQ \cap DG = \{R\}$.Demonstrati ca :

a) $[AB] \equiv [AG]$.

b) $PQ \parallel FR$.

c) CQ este bisectoarea $\angle ACD$.

Solutie:

a) $AE \perp BG$ si AE bis. $\angle BAG$ avem AF bis.si inaltime deci $\triangle AGB$ isoscel ,deci $AB=AG$ si AF mediana avem ca $FB=FG$. 2 puncte

b) Din $PQ \parallel BD$ avem $PQ \parallel (BGD)$ 1punct

dar $(CPQ) \cap (BGD) = FR \quad \mid$ deci $FR \parallel PQ$ 1 punct

c) $AC=AG+GC$ si $AC=AB+CD$ avem $AG=AB$ deci $CG=CD$ avem $\triangle CGD$ isoscel de baza DG . 1 punct

In $\triangle GBD$

$FR \parallel BD$ si $FG=BF$ deci FR linie mijlocie si avem $GR=RD$. 1 punct

In $\triangle DGC$ isoscel , CR mediana deci CR bis. $\angle GCD$ avem ca CR bis. $\angle ACD$. 1 punct