

Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

Clasa a XII-a

I. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea " $\circ$ " prin relația $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine elementele din $\mathbb{Z}$, simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ";

b) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016} = x$.

II. a) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{4k+1}{4} \text{ și } \int_1^2 f(x) dx = \frac{4k+15}{4}.$$

b) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$4 \cdot \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = 3.$$

RMCS 38

III. Se consideră funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \cdot e^x$.

Dacă F este o primitivă a funcției considerate și $F(0) = 1$, calculați $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

RMCS 30

IV. a) Se consideră un grup finit $(G, \circ)$ de ordin impar și $a, b, c \in G$ cu proprietatea că $a \circ b = c$ și

$c \circ b = a$. Demonstrați că $a = c$.

b) Studiați dacă există $a, b, c \in (\mathbb{Z}_4, +)$ pentru care $a + b = c$, $c + b = a$ și $a \neq c$.

Articol Gazeta Matematică 2010

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.