

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală, februarie 2016

Clasa a X-a

Barem de evaluare și notare

SUBIECTUL I (7p)

a) Demonstrați că:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}, \forall k, n \in \mathbb{N}^*, k \leq n.$$

b) Ordonăți crescător numerele:

$$1 + \frac{1}{n}, \log_n(n+1), \log_{n+1}(n+2), \text{ pentru } n \geq 3.$$

a) Demonstrația prin inducție a inegalității.....2p

b) $\log_n(n+1) < 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, adevărată pt $n \geq 3$ (se obține din punctul a) ..2p

c) $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) \Leftrightarrow (\log_{n+1} n) \log_{n+1}(n+2) < 1$1p

Aplicarea inegalității mediilor1p

Finalizare: $\log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1) < 1 + \frac{1}{n}$ 1p

SUBIECTUL II (7p)

Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$. Demonstrați că:

a) $x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A$;

b) $x \in A \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$;

c) există numere din A care au primele 100 de zecimale egale cu 9.

a) $\frac{1}{a + b\sqrt{3}} = a - b\sqrt{3}$ 1p

b) Se demonstrează prin inducție..... 2p

c) Fie $x = 2 + \sqrt{3} \in A$. Evident $x > 1$ și $x^n \notin \mathbb{Z}$. Există $n \in \mathbb{N}$, de exemplu, $n = \left\lceil \frac{100}{\lg x} \right\rceil + 1$ astfel ca

$$\frac{1}{x^n} < \frac{1}{10^{100}} \dots\dots\dots 2p$$

Cum, din b), $x^n + \frac{1}{x^n} = p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\lfloor x^n \right\rfloor = p - 1$ și $\{x^n\} = 1 - \frac{1}{x^n} > \frac{10^{100} - 1}{10^{100}} = 0,99\dots9$ 2p

SUBIECTUL III (7p)

Fie $z \in \mathbb{C}$ care satisface ecuația $(z+i)^{10} + i(z-i)^{10} = 0$. Să se arate că:

- a) $|z+i| = |z-i|$;
- b) $z \in \mathbb{R}$
- c) Să se rezolve ecuația.

a) Se separa termenii si se trece la module.....1p

b) Se foloseste a) sau ca, imaginea lui z este egal departata de imaginea lui i si $(-i)$2p

c) Ecuația este echivalenta cu $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = -i$ 1p

Forma trigonometrica a lui i 1p

Multimea solutiilor este $\left\{ \operatorname{ctg} \frac{4k\pi + 3\pi}{40} / k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \right\}$ 3p

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $z, z' \in \mathbb{C}$ cu $|z| = |z'| = 1$. Să se arate că:

$$\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)^{2n} + \left(\frac{z-z'}{1-zz'}\right)^{2n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, zz' \neq \pm 1.$$

$z = \cos a + i \sin a, z' = \cos b + i \sin b$1p

$A = \frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, B = \frac{z-z'}{1-zz'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, unde $\alpha = \frac{a-b}{2}, \beta = \frac{a+b}{2}$ 2p

$A^{2n} + B^{2n} \geq 2 \left(\frac{A^2 + B^2}{2} \right)^n \geq \frac{2}{2^n} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta) = \frac{1}{2^{n-1}}$ 4p

Orice alta solutie se ia in considerare.