



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 14 februarie 2014

Clasa a V-a

1 FELADAT

Adottak a következő számok

$$x = \left[3^{121} : 9^{60} + (5^3)^2 : (5^2)^2 \right] : 2^2 \cdot 3 - 3 \text{ és } y = 100 : \left\{ 23 + 34 : \left[(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 34^0 \cdot 1^{2013} \right] \right\}$$

- a) Hasonlítsátok össze a 3^x és 5^y számokat
- b) Bizonyítsátok be, hogy $x^{2013} + y^{2014}$ nem teljes négyzet.

2 FELADAT

Adottak az x, y, z nullától különböző természetes számok. Ha elosztjuk az x számot y -al, a hányados 4 és a maradék 3. Ha elosztjuk az y számot z -vel, a hányados 5, a maradék pedig 4.

- a) Mutassátok ki, hogy $x \geq 100$.
- b) Határozzátok meg az x, z, y számokat, tudva, hogy $x + y + z = 153$.

3 FELADAT

- a) Mutassátok ki, hogy $\frac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} \in N$, ahol x számjegy.
- b) Számítsátok ki $2014 - (2013 \cdot 2012 + 2013) : 2013^2$.

4 FELADAT

Adottak a következő halmazok: $A = \{x \in N^* \mid 2 \cdot x \leq 8\}$,

$$B = \{x \in N^* \mid x = 2^{n-1}, n \in A\},$$

$$C = \{x \in N \mid x = m - n, m \in B, n \in A, m > n\}.$$

- a) Határozzátok meg az A, B és C halmazok elemeit;
- b) Határozzátok meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemeit;
- c) Állapítsátok meg a következő kijelentés logikai értékét: “Az $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ halmaz elemei csak egymást követő számok lehetnek.”

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. Munkaidő 2 óra. Minden feladatra legtöbb 7 pont jár.



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VI-a

1 Feladat

Határozzátok meg az a és b természetes számokat, tudva, hogy $[a,b]$ 15-ször nagyobb, mint (a,b) és $5a+3b=150$. Az $[a,b]$ a két szám legkisebb közös többszörösét és (a,b) a két szám legnagyobb közös osztóját jelöli.

2 Feladat

a) Adottak az $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$ és $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$ számok. Igazoljátok, hogy

$$\frac{a+b}{3} \in \mathbb{N}.$$

b) Számítsátok ki $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364$ összeget és igazoljátok, hogy $53 \mid S$.

3 Feladat

6 évvel ezelőtt a kislány életkora, édesanyja életkorának 0,2 -e volt, míg 9 év múlva a kislány életkora, édesanyja akkori életkorának 0,5 -e lesz. Hány évesek jelenleg külön-külön?

4 Feladat

Az AB és CD egyenesek O pontban metszik egymást. Tudva, hogy $[OM]$, $[OT]$, $[OR]$ félegyenesek a $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOM}$ illetve $\widehat{COB}$ szögek szögfelezői és $m(\widehat{AOM}) = 130^\circ$, számítsátok ki:

a) $m(\widehat{ROM})$ és $m(\widehat{AOD})$;

b) az $\widehat{AOC}$ és $\widehat{BOR}$ szögek szögfelezői által bezárt szög mértékét.

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. Munkaidő 2 óra. Minden feladatra leg több 7 pont jár.



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VII-a

1 Feladat

Határozzátok meg az x egész értékeit,

amelyekre $E(x) = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$ kifejezés értéke egész szám.

2 Feladat

Határozzátok meg az a racionális számot, tudva, hogy $\left(\frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}} \right) \cdot a + \sqrt{5}$ racionális szám.

3 Feladat

a) Bizonyítsátok be, hogy $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$

b) Adottak a következő számok:

$$a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30} \quad \text{és} \quad b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018.$$

Mutassátok ki, hogy $I = \sqrt{15a + \frac{b}{1002}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4 Feladat

Adott az ABC tetszőleges háromszög. Fel lehet-e osztani 16384 kongruens háromszögre? Indoklás.

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. Munkaidő 3 óra. Minden feladatra leg több 7 pont jár.



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VIII-a

1 Feladat

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a = b - 1$ és $b \in [1; 3]$. Mutassuk ki, hogy:

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = 2\sqrt{2}.$$

2 Feladat

a) Az $ABCD$ négyzet és az $ABEF$ téglalap síkjai merőlegesek egymásra. Ha $AB=40$ cm, $BE=30$ cm, számítsátok ki $d(D, EF)$ és $d(E, AC)$.

b) Az $OLEMPICS$ kocka élének hossza $OP=6$ cm.

Számítsátok ki: i) annak a téglatestnek a testátlóját, amelyet két, ilyen kocka egymás mellé helyezésével nyerünk ;

ii) $d(M, (PLC))$;

iii) $m(<(OC, (OLE)))$.

3 Feladat

Adott $E(x, y) = 2013x - 2014y - 1$

a) Ha $x \in [-1; 1]$ és $y \in [-2; -1]$ mutassátok ki, hogy $E(x; y) \geq 0$;

b) Határozzátok meg az $E(x, y)$ maximális értéke osztóinak számát.

4 Feladat

Adott az A, B, C, D négy nem koplanáris pont és G_1, G_2, G_3 a BCD_{Δ} , ACD_{Δ} illetve az ABD_{Δ} súlypontjai.

a) Mutassátok ki, hogy a $(G_1G_2G_3)$ és az (ABC) párhuzamos síkok;

b) Bizonyítsátok be, hogy az AG_1 , BG_2 és CG_3 összefutó egyenesek.

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. Munkaidő 3 óra. Minden feladatra leg több 7 pont jár.