INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I

TELEFON: 0235/311928 , FAX: 0235/311715

e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro

website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9.02.2013- Clasa a VII-a

1. a) Calculaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor $3\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ şi b unde:

$$a=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$$

$$b=(|2^{80}-8^{26}|+4^{30}:8^{7}):(-81^{6})+\sqrt{(8-5\sqrt{3})^{2}}+\sqrt{361}-\sqrt{48}.$$

b) Fie:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

Determinaţi valorile lui n pentru care $S_n < 2012$.

2.a) Fie ecuaţia $2ab-a-4b=4$, unde a,b$\in$ Z . Determinaţi perechile de numere (a,b) care verifică ecuaţia şi pentru care $\sqrt{a\cdot b}\in$ N

b) Găsiţi cea mai mică valoare a expresie :

E(x,y)=$\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{y^2-10y+29}$ unde x şi y sunt numere reale.

3. Se dă triunghiul ABC cu $(AB)\equiv(AC)$ şi unghiurile A şi B sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 4. Fie D simetricul punctului C faţă de AB. Să se determine măsura unghiului DEB, dacă punctul $E\in AC$ şi $DE+EB$ este minimă.

4. În ΔABC , $m(\sphericalangle ABC)=2\cdot m(\sphericalangle ACB)$ şi $AD\perp BC$, $(D\in(BC))$. Punctele E şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AD astfel încât $BE\perp AE$ şi $\sphericalangle EAB\equiv\sphericalangle ACB$. Bisectoarea unghiului AED intersectează dreapta AC în M. Dacă $\{H\}=AE\cap BC$, arătaţi că:

a) $\Delta BHA,\Delta AHC$ sunt isoscele;

b) MCDE este paralelogram;

c) perimetrul paralelogramului MCDE este egal cu perimetrul triunghiului ABC.

(*G.M. nr. 10/2012*)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

1.a

$a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $3\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \sqrt{3}$;	..............................1p
$b = 2 + \sqrt{3}$;	..............................2p
$m_a = 2$; $m_g = 1$.	..............................1p

1.b

$S_n = \sqrt{n+1} - 1$;	..............................2p
$n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2019^2 - 2\}$.	..............................1p

2.a) Ecuația este echivalentă cu $a(2b-1)-2(2b-1)-2=4 \Leftrightarrow$ **(1p)**

$(a-2)\cdot(2b-1)=6 \Leftrightarrow$ **(1p)**

$\begin{cases} a-2=2 \\ 2b-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} (F)$ $\begin{cases} a-2=-2 \\ 2b-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{0\cdot(-1)}=0 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

$\begin{cases} a-2=6 \\ 2b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=1 \end{cases} (F)$ $\begin{cases} a-2=-6 \\ 2b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(-4)\cdot 0}=0 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

2.b) Scrie : E(x,y)=$\sqrt{(x+2)^2+1}+\sqrt{(y-5)^2+4}$ …………………….. 1p

Scrie: $(x+2)^2+1 \geq 1$; $(y-5)^2+4 \geq 4$ ………………… 1p

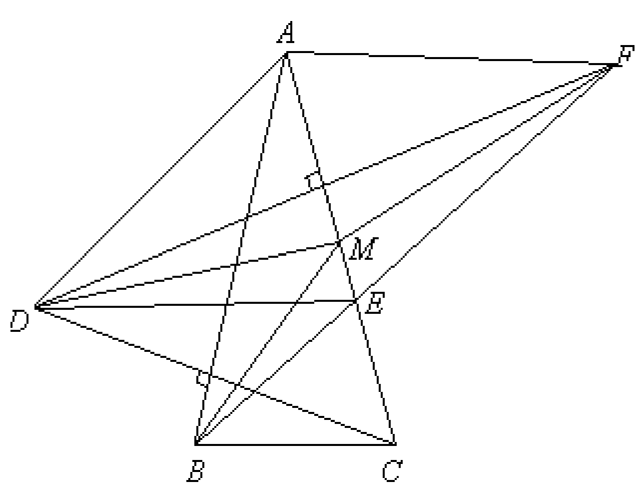
Min E(x,y)=5 care este luat pentr x=-2 şi y=5……………………1p

3. Soluție:

$\frac{m\angle(A)}{2} = \frac{m\angle(B)}{4} = \frac{m\angle(C)}{4} = k \Rightarrow$

$m\angle(A) = 36^0$ şi

$m\angle(B) = m\angle(C) = 72^0$. **(2p)**



Dacă D este simetricul punctului C față de AB, atunci $(AC) \equiv (AD) \equiv (AB)$. **(1p)**

Fie F simetricul lui D față de AC şi $BF \cap AC = \{E\}$. Întrucât AC este mediatoarea lui (DF) avem $DE = EF$, de unde $DE + BE = EF + BE = BF$. **(1p)**

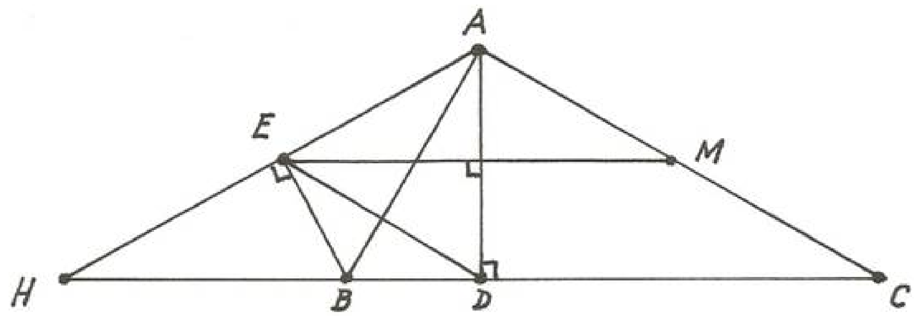
Se observă că $(\forall) M \in AC$ cu $M \neq E$ avem $DM + MB = MF + MB \geq BF$. Minim dacă şi numai dacă $M = E$. **(1p)**

Pentru că AC este mediatoarea lui (DF) avem $\triangle ADF$ isoscel cu $m\angle(AFD) = m\angle(ADF) = 18^0$. **(1p)**

Întrucât $\triangle ABF$ este isoscel cu $m\angle(AFB) = 36^0$ avem $m\angle(DFE) = m\angle(EDF) = 18^0$, de

unde $m\angle(DEB) = 36^0$ **(1p)**

4.Soluție



	a)	$m(\sphericalangle H) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle BAH) = m(\sphericalangle ACH)$;	1	
		ΔABH isoscel; ΔAHC isoscel.	1	
	b)	$[ED]$ – linie mijlocie în ΔAHC $\rightarrow$ $ED \parallel AC$;	1	
		ΔAED isoscel $\rightarrow$ $EM \perp AD$; cum $DC \perp AD$ $\rightarrow$ $EM \parallel DC$;	1	
		$MCDE$ paralelogram.	1	
	c)	$P_{MCDE} = 2 \cdot MC + 2 \cdot CD$;	0.5	
		$P_{ABC} = AC + AB + BC = AC + HB + BD + DC =$ $= AC + HD - BD + BD + DC = AC + (HD + DC) =$ $= 2 \cdot MC + 2 \cdot CD$;	1	
		Finalizare.	0.5	

Orice soluție corectă se punctează cu 7 puncte.