

Barem de corectare OLM 2020 Clasa a XI-a

P1 – manual

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \infty, & x > 0 \end{cases}; f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x-1 , & x > 0 \end{cases}$	4p
$l_s(0) = l_d(0) = 1$, deci f are limită în $x_0 = 0$.	2p
f are limită în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$.	1p

P2

a) $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); XA = AX \Rightarrow x_{11} = x_{22} = x_{33} = a; x_{12} = x_{23} = x_{31} = b; x_{13} = x_{21} = x_{32} = c$	2p
$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2$	1p
b) $X, Y \in M(A)$, deci $X = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2, Y = d \cdot I_3 + e \cdot A + f \cdot A^2$	1p
Comutativitatea $X \cdot Y = Y \cdot X$ se poate verifica prin calcul sau folosind faptul că $A^k A^j = A^j A^k = A^{k+j}, \forall k, j \in \mathbb{N}$	3p

P3 – (în legătură cu XI.491, RMT4/2018)

a) Alegem $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$. Egalitatea se demonstrează prin calcul direct sau folosind proprietățile determinantilor.	2p
b) $(AB - BA)^{n-1} \cdot (AB - BA - I_2) = O_2(1)$	1p
Dacă $\det(AB - BA) \neq 0$, atunci $AB - BA$ este inversabilă și prin înmulțirea cu inversa ei în stânga egalității (1) deducem că $AB - BA = I_2$.	1p
Dar $\text{tr}(AB - BA) = 0$ și $\text{tr}(I_2) = 2$ și astfel presupunerea $\det(AB - BA) \neq 0$ este falsă, de unde $\det(AB - BA) = 0$	1p
Alegând în identitatea de la a) $X = AB, Y = BA$ se obține $\det(AB + BA) + \det(AB - BA) = \det(AB + BA)$ $= 2[\det(AB) + \det(BA)] = 2(\det A \cdot \det B + \det B \cdot \det A) = 4 \det A \cdot \det B$	2p

P4– autor Laurențiu Panaitopol (GM 11/2019)

a) $a_1 \in (0,1)$, presupunem $a_k \in (0,1) \Rightarrow 2^{a_k} \in (1,2) \Rightarrow (2^{a_k} - 1) \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} \in (0,1)$, de unde $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in (0,1)$, deci șirul este mărginit	2p
Privind graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x, g(x) = 2^x$ reprezentate în același sistem de coordonate xOy , având în comun punctele $A(0,1)$ și $B(1,2)$, observăm că pentru $a_k \in (0,1)$ găsim $f(a_k) > g(a_k)$, deci $a_k > 2^{a_k} - 1$, de unde $a_k > a_{k+1}$.	2p
Șirul este monoton și mărginit, deci are limită un număr, soluție a ecuației $x + 1 = 2^x, x \in [0,1]$; șirul fiind strict descrescător $\Rightarrow x = 0$	1p
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$	2p