



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

18 februarie 2017

Clasa a V-a

1. Ștefan îl întreabă pe colegul său:
 - Vrei să-ți ghicesc ziua și luna nașterii?
 - Da.
 - Atunci te rog să faci următoarele calcule: adună 2 la ziua nașterii și înmulțește rezultatul cu 2. Adaugă 5 la rezultat și apoi înmulțește cu 5. La rezultatul obținut adaugă luna nașterii. Cât ți-a dat?
 - 335.
 - Ești născut în prima jumătate (primele șase luni) sau în a doua jumătate (ultimele șase luni) a anului?
 - În a doua jumătate.
 - Te-ai născut pe 28 octombrie.Cum a raționat Ștefan?
2. a) Să se determine ultimele patru cifre ale numărului 3^{200x} , unde $x \in \{7, 8, 9\}$.
b) Arătați că numărul $1+3+5+\dots+2017$ este pătrat perfect.
c) Calculați $2017^3 - 2017^2 \cdot 2016 - 2017 \cdot 2015 - 2014$.
3. Să se determine restul împărțirii numărului:
 $a = 3^{2n+1} \cdot 7^{n+2} + 3^{2n+2} \cdot 7^n + 3^{2n+3} \cdot 7^{n+1}$ la 62, unde $n \in \mathbb{N}$.
4. Pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, definim mulțimea
$$X_n = \left\{ \overline{a_1 a_2 \dots a_n} / a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \leq a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \right\}.$$
 - a) Determinați cardinalul mulțimii X_2 .
 - b) Determinați cel mai mic număr natural n , $n \geq 2$, cu proprietatea că mulțimea X_n nu are niciun element.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 2 ore.

Soluții și bareme orientative

Clasa a V-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Se notează cu $z \in \{1, 2, 3, \dots, 31\}$ ziua de naștere și cu $l \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ luna nașterii colegului. Din dialog se deduce:

$$5 \cdot [2 \cdot (z + 2) + 5] + l = 335 \Leftrightarrow 5 \cdot (2 \cdot z + 9) + l = 335 \Leftrightarrow 10 \cdot z + 45 + l = 335 \quad (3p)$$
$$\Leftrightarrow 10 \cdot z + l = 290, (*) \Leftrightarrow z = \frac{290-l}{10} (**). \quad (1p)$$

Dar: $7 \leq l \leq 12$, relația (**) se scrie: $\frac{290-12}{10} \leq z \leq \frac{290-7}{10} \Leftrightarrow \frac{278}{10} \leq z \leq \frac{283}{10}$, deci $z = 28$. (2p)

Folosind relația (*) se obține: $l = 290 - 10 \cdot 28 = 290 - 280 = 10$.

În concluzie: luna nașterii este octombrie, luna a 10-a din an, iar ziua nașterii este a 28-a zi din această lună.

(1p)

2. a) Deoarece:

$3^{\overline{200x}} = 3^{2000} \cdot 3^x = 81^{500} \cdot 3^x = (8 \cdot 10 + 1)^{500} \cdot 3^x = \overline{\dots 0001} \cdot 3^x$, deducem că ultimele patru cifre ale numărului $3^{\overline{200x}}$ sunt ultimele patru cifre ale numărului 3^x . (2p)

În concluzie, ultimele patru cifre ale numărului $3^{\overline{200x}}$, pentru $x \in \{7, 8, 9\}$, sunt: 2187, 6561 și 9683. (1p)

b)

$$1+3+5+\dots+2017=(2 \cdot 0+1)+(2 \cdot 1+1)+(2 \cdot 2+1)+\dots+(2 \cdot 1008+1)= \quad (1p)$$

$$=2 \cdot (1+2+3+\dots+1008)+\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{1009 \text{ termeni}}=1008 \cdot 1009+1009=1009^2. \quad (1p)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 2017^3 - 2017^2 \cdot 2016 - 2017 \cdot 2015 - 2014 &= 2017^2 - 2017 \cdot 2015 - 2014 = \\ &= 4034 - 2014 = 2020. \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1p) \\ (1p) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad a &= 3^{2n+1} \cdot 7^{n+2} + 3^{2n+2} \cdot 7^n + 3^{2n+3} \cdot 7^{n+1} = \\ &= 9^n \cdot 3 \cdot 7^n \cdot 7^2 + 9^n \cdot 9 \cdot 7^n + 9^n \cdot 27 \cdot 7^n \cdot 7 = \end{aligned} \quad (2p)$$

$$= 63^n \cdot (3 \cdot 49 + 9 + 27 \cdot 7) = (62 + 1)^n \cdot 345 = (M62 + 1) \cdot 345 = \quad (3p)$$

$$= M62 + 345 = M62 + 62 \cdot 5 + 35 = M62 + 35,$$

de unde restul împărțirii este 35.

(2p)

$$4. \text{ a) } X_2 = \left\{ \overline{a_1 a_2} / a_1^2 + a_2^2 \leq \overline{a_1 a_2} \leq a_1^3 + a_2^3 \right\}. \quad (1p)$$

$$a_1^2 + a_2^2 \leq \overline{a_1 a_2} \leq a_1^3 + a_2^3 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \leq 10a_1 + a_2 \leq a_1^3 + a_2^3.$$

-dacă $a_1 = 1$ rezultă $1 + a_2^2 \leq 10 + a_2 \leq 1 + a_2^3 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 9 + a_2 \leq a_2^3$ deci $a_2 = 3$.

-dacă $a_1 = 2$ rezultă $4 + a_2^2 \leq 20 + a_2 \leq 8 + a_2^3 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 16 + a_2 \leq 4 + a_2^3$ deci $a_2 \in \{3, 4\}$. (1p)

-dacă $a_1 = 3$ rezultă $9 + a_2^2 \leq 30 + a_2 \leq 27 + a_2^3 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 21 + a_2 \leq 18 + a_2^3$ deci $a_2 \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Dacă $a_1 \geq 4$ inegalitatea din membrul drept are loc deoarece $10a_1 < a_1^3$ și $a_2 < a_2^3$

-dacă $a_1 = 4$ rezultă $16 + a_2^2 \leq 40 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 24 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. (1p)

-dacă $a_1 = 5$ rezultă $25 + a_2^2 \leq 50 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 25 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

-dacă $a_1 = 6$ rezultă $36 + a_2^2 \leq 60 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 24 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

-dacă $a_1 = 7$ rezultă $49 + a_2^2 \leq 70 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 21 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. (1p)

dacă $a_1 = 8$ rezultă $64 + a_2^2 \leq 80 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 16 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

dacă $a_1 = 9$ rezultă $81 + a_2^2 \leq 90 + a_2 \Leftrightarrow a_2^2 \leq 9 + a_2$, deci $a_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Rezultă $\text{card}(X_2) = 40$.

b) $129 \in X_3(1^2 + 2^2 + 9^2 = 86 < 129 < 738 = 1^3 + 2^3 + 9^3)$, rezultă $\text{card}(X_3) \neq 0$. (1p)

$1089 \in X_4(1^2 + 8^2 + 9^2 = 146 < 1089 < 1242 = 1^3 + 8^3 + 9^3)$, rezultă $\text{card}(X_4) \neq 0$. (1p)

Pentru $n = 5$ avem $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} > 9999 > 5 \cdot 9^3 = 3645 \geq a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$, deci

$\text{card}(X_5) = 0$. Rezultă că cel mai mic număr natural n , $n \geq 2$, cu proprietatea $\text{card}(X_n) = 0$ este 5. (1p)