OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a IX-a

Subiecte:

1. Fie numerele reale a,b,c ≥ 0 care verifică relația ab + ac + bc = 671
   a) Să se arate că a + b + c $\geq \sqrt{2013}$. În ce caz are loc egalitatea?
   b) Arătați că $\sqrt{671-ab}+\sqrt{671-ac}+\sqrt{671-bc}<\frac{3}{2}(a+b+c)$.

   Septimiu Voiculeț, Videle, Teleorman

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, $a_1 \in N^*$ rația $r \in N^*$, cu proprietatea că $a_{2013}=3102$. Determinați numerele naturale m cu proprietatea că $a_m=\overline{m}$, unde $\overline{m}$ este răsturnatul lui m.

   Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O punctul de intersecție a diagonalelor și punctele $M \in BC, N \in AD$ astfel încât $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{ON}$.
   a). Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
   b). Fie $\{P\}=AD\cap BC$ și N_1 simetricul lui C față de N. Demonstrați că P este centrul de greutate al triunghiului ACN_1.
   c) Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AN_1}$ sunt coliniari.

   Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

4. Fie ABC un triunghi și punctele M,N,P astfel încât $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$. Să se arate că pentru orice punct O din plan are loc relația: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.