

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–
Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale, ecuația

$$\begin{vmatrix} 4^{x^2} & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 2^{-x} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 4^x & 2^{-x^2} \\ 2^{-x} & 2^{-x^2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Soluție:

Calculând determinantul, avem:

$$2^{2x^2+2x+\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{-x^2-x-\frac{1}{4}} - 3 = 0$$

7,5p

Notând $2^{x^2+x+\frac{1}{4}} = t > 0$, avem ecuația $t^3 - 3t + 2 = 0$, cu soluțiile
 $t = 1$ și $t = -2$ (care nu convine);

6p

$$2^{x^2+x+\frac{1}{4}} = 1, \text{ deci } x = -\frac{1}{2}.$$

4p

5p

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $p \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 - x^p + 1} \right) = 2$$

Soluție:

$$\text{Fie } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 - x^p + 1} \right) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 - x^p} \right) = 1$$

1,5p

$$\text{Fie } L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 - x^p} \right); \text{ dacă } p = 1 \Rightarrow |L| = \infty$$

2p

$$\text{Dacă } p \geq 3 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[3]{a} - x^{p-2} \right) = -\infty$$

2p

$$\text{Pentru } p = 2 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[3]{a} - 1 \right) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a < 1, a \neq 0 \\ \text{caz de excepție } \infty \cdot 0, \text{ dacă } a = 1 \\ +\infty, \text{ dacă } a > 1 \end{cases}$$

4p

Se obține $p = 2$ și $a = 1$

2p

Pentru $p = 2$ și $a = 1 \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^6 + bx^4 + 3x^2 + 2} - x^2)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 - x^6}{\sqrt[3]{(x^6 + bx^4 + 3x^2 + 2)^2 + x^2} \sqrt[3]{x^6 + bx^4 + 3x^2 + 2 + x^4}} \quad 6p$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^4}{3x^4} = \frac{b}{3} \quad 3p$$

$$\frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b = 3 \quad 2p$$

În concluzie, $a = 1, b = 3$ și $p = 2$

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $a_0 \in [0, 1]$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUPLIMENT GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

Șirul este bine definit dacă $a_n - a_n^2 \geq 0$, deci $a_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ adică șirul este mărginit; 6,5p

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n - a_n^2} = \sqrt{a_n(1 - a_n)} \leq \frac{a_n + 1 - a_n}{2} = \frac{1}{2} \text{ (inegalitatea mediilor) și } a_n \in [0, \frac{1}{2}], n \in \mathbb{N}^* \quad 4p$$

$$\text{Calculăm pentru monotonie } (a_{n+1})^2 - a_n^2 = a_n - a_n^2 - a_n^2 = a_n - 2a_n^2 \quad 4p$$

$$= a_n(1 - 2a_n) \geq 0, \text{ deci șirul este monoton;}$$

Fiind monoton și mărginit, șirul este convergent. 6p
2p

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det A = -1$ și $t = \text{tr}(A) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

8,5p a) Să se arate că $A^2 - tA - I_2 = O_2$.

14 b) Știind că $\det(A^2 - 2A - 2I_2) + \det(A^2 - 2A + 2I_2) = 6$, să se arate că $A(A - I_2) = I_2$.

Soluție:

a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. $\det A = -1 \Leftrightarrow ad - bc = 1, \quad t = \text{tr}(A) \Leftrightarrow a + d = t$	3,5p
Conform relației Cayley Hamilton avem $A^2 - (tA) + (\det(A))I_2 = O_2$	3p
Înlocuind obținem $A^2 - tA - I_2 = O_2$	2p
b) Avem $A^2 = tA + I_2$	2p

$A^2 - 2A - 2I_2 = (t - 2)A - I_2$	2p
$\det(A^2 - 2A - 2I_2) = -2t^2 + 6t - 3$	3p
$A^2 - 2A + 2I_2 = (t - 2)A + 3I_2$	2p
$\det(A^2 - 2A + 2I_2) = 2t^2 - 2t + 5$	3p
$\det(A^2 - 2A - 2I_2) + \det(A^2 - 2A + 2I_2) = 6 \Leftrightarrow -2t^2 + 6t - 3 + 2t^2 - 2t + 5 = 6$ $\Leftrightarrow 4t = 4 \Leftrightarrow t = 1$ $A^2 = A + I_2 \Leftrightarrow A(A - I_2) = I_2$	2p

Notă:

Se acordă 10 puncte din oficiu.