

Soluții clasa aX-a:

1.a) Să presupunem că graficul funcției f conține patru puncte A, B, C, D care formează un paralelogram. Coordonatele punctelor sunt: $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)), D(d, f(d))$. Cum $ABCD$ paralelogram, au loc relațiile: $a + c = b + d, f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$, cu $a < b < d < c$ și relații analoage. Atunci din $b \in (a, c) \Rightarrow \exists \lambda \in (0, 1)$ astfel încât $b = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot c$ (1). Cum f este strict concavă, rezultă $f(b) > \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(c)$ (2). Analog, există $\eta \in (0, 1)$ astfel încât $d = \eta \cdot a + (1 - \eta) \cdot c$ (3) și $f(d) > \eta \cdot f(a) + (1 - \eta) \cdot f(c)$ (4). Adunând relațiile (2), (4), obținem:
 $f(b) + f(d) > (\lambda + \eta) \cdot f(a) + (2 - \lambda - \eta) \cdot f(c)$ (*), iar din (1), (3) rezultă că $b + d = (\lambda + \eta) \cdot a + (2 - \lambda - \eta) \cdot c = a + c$, de unde $(\lambda + \eta - 1) \cdot (c - a) = 0$. Cum $a \neq c \Rightarrow \lambda + \eta = 1$, atunci relația (*) devine: $f(b) + f(d) > f(a) + f(c)$. Așadar nu există patru puncte pe graficul funcției care să formeze un paralelogram.
 b) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este convexă pentru $[0, \infty)$ (interval), atunci are loc inegalitatea:

$$f\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^3 \leq \frac{\lambda_1 \cdot x_1^3 + \lambda_2 \cdot x_2^3}{\lambda_1 + \lambda_2}, \forall x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty).$$

Generalizarea inegalității:

$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}\right)^3 \leq \frac{\lambda_1 \cdot x_1^3 + \lambda_2 \cdot x_2^3 + \dots + \lambda_n \cdot x_n^3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n},$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty), \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, \infty).$$

$$2.a) |z - z_i|^2 = (z - z_i)(\bar{z} - \bar{z}_i) = |z|^2 - z\bar{z}_i - z_i\bar{z} + |z_i|^2 =$$

$$= |z|^2 + 1 - (z\bar{z}_i + z_i\bar{z}), i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Atunci: } |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n -$$

$$-(z_1 + z_2 + \dots + z_n)\bar{z} - z(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) = n|z|^2 + n.$$

b) Aplicăm inegalitatea Cauchy- Buniakowski-Schwartz:

$$(|z - z_1| \cdot 1 + |z - z_2| \cdot 1 + \dots + |z - z_n| \cdot 1)^2$$

$$\leq (|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2) \cdot n$$

$$= n^2(|z|^2 + 1) \leq 2n^2 \Rightarrow |z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}.$$

sau

b) Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2}{n}}, (\forall) z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow |z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{\frac{n|z|^2 + n}{n}} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{n}} = n\sqrt{2},$$

$$(\forall) z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$$

$$3.a) \Delta = (5 - 12i)^2, \text{ de unde } z_1 = 9 - 6i, z_2 = 4 + 6i.$$

$$\text{Atunci } AB = |z_1 - z_2| = 13, AO = |z_1| = 3\sqrt{13}, BO = |z_2| = 2\sqrt{13}$$

Se observă că $OA^2 + OB^2 = AB^2$, deci $\triangle AOB$ este dreptunghic cu unghiul drept în O , iar aria triunghiului este:

$$A_{\triangle AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = 39.$$

b) Deoarece ΔAOB este dreptunghic cu unghiul drept în O rezultă că un sfert din cercul ce constituie reprezentarea grafică a inecuației $|z| \leq 4$ acoperă triunghiul.

$$A_{sect} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi \cong 12,56 \cong 32,2\% A_{\Delta AOB}.$$

4.a) $3^x = 2^x + 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1.$

Se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației. Arătăm că această soluție este unică.

Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$, este strict descrescătoare, deci injectivă și atunci soluția unică este $x = 1$.

b) $x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$ și $(x-1)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 (x-1)}.$

Notăm $a = \log_3 x$ și $b = \log_2 (x-1) \Rightarrow x = 3^a$ și $x = 2^b + 1$,

De aici obținem: $3^a = 2^b + 1$.

Ecuația dată este echivalentă cu: $2^a + 1 = 3^b$.

Din cele două relații, obținem:

$$3^a - 2^b = 3^b - 2^a \Leftrightarrow 3^a + 2^a = 3^b + 2^b.$$

Considerăm funcția: $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = 3^x + 2^x$, care este strict crescătoare și deci este și injectivă, rezultă $a = b$.

Atunci: $3^a = 2^a + 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a = 1.$

Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$, este strict descrescătoare, deci injectivă și atunci soluția unică este $a = 1 \Rightarrow x = 3$.