



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $X^{2019} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2021 & 3 \end{pmatrix}$.

* * *

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $A^2 = AB$ și $A^3 + (A - B)^3 = O_2$. Să se arate că $AB = BA$.

Gheorghe Andrei

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}^*\} = k \in \mathbf{Z}$ și $x_n \neq k, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $[x_n + a] = [x_n] + [a] \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$ atunci $a \in \mathbf{Z}$.
S-a notat cu $[y]$ partea întreagă a numărului real y .

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n = \sum_{k=1}^n \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Determinați $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \in \mathbf{R}^*$.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.