

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

1. a) Dacă numerele $x, y, z \in \mathbf{R}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice și numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, demonstrați că $a^{y-z} \cdot b^{z-x} \cdot c^{x-y} = 1$.

b) Dacă numerele $a, b, c \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, demonstrați că:

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg b - \lg c} \cdot \left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg c - \lg a} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg a - \lg b} \in \mathbf{N}.$$

Soluție:

a) Cum $a, b, c \in (0, \infty)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, avem că $b^2 = ac$1p

Notând cu r rația progresiei aritmetice: $a^{y-z} \cdot b^{z-x} \cdot c^{x-y} = a^{-r} \cdot b^{2r} \cdot c^{-r} = a^{-r} \cdot (ac)^r \cdot c^{-r} =$...1p

$$= a^0 c^0 = 1 \quad \dots 1p$$

b) Notând $E = \left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg b - \lg c} \cdot \left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg c - \lg a} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg a - \lg b}$, se logaritmează relația în baza 10. ...1p

$$\text{Se obține } \lg E = (\lg b - \lg c)(\lg b + \lg c - \lg a) + (\lg c - \lg a)(\lg c + \lg a - \lg b) + (\lg a - \lg b)(\lg a + \lg b - \lg c) = 0 \quad \dots 2p$$

$$\text{Deci } E = 1 \in \mathbf{N}. \quad \dots 1p$$

2. Pentru $a, b \in (0, 1)$ demonstrați că are loc inegalitatea: $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

Soluție:

$$\text{Cum } m_h(a, b) \leq m_g(a, b), \text{ avem că } \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad \dots 1p$$

$$\text{Dar } a, b \in (0, 1), \text{ prin urmare } \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} \text{ și } \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab} \quad \dots 2p$$

$$\text{Cum } a, b \in (0, 1) \text{ rezultă că } \log_a \sqrt{ab} > 0, \log_b \sqrt{ab} > 0 \text{ și} \quad \dots 1p$$

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} \cdot \log_b \sqrt{ab} = \frac{1}{4}(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) \quad \dots 1p$$

$$\text{Dar } \frac{1}{4}(1 + \log_a b)(1 + \log_b a) = \frac{2 + \log_a b + \log_b a}{4} \geq 1 \text{ deoarece} \quad \dots 1p$$

$$\log_a b + \log_b a \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = 2 \quad \dots 1p$$

3. Se consideră mulțimile $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i| \leq 1\}$ și $B = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| \leq 1\}$.
Determinați mulțimea $A \cap B$.

(A. Doboșan, R.M.T. nr. 2/ 2016 - enunț modificat)

Soluție:

Din $|z - i| \leq 1$ rezultă că mulțimea B este discul centrat în $O_1(i)$ de rază $r_1 = 1$1p

Din $|z - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i| \leq 1$ rezultă că mulțimea A este discul centrat în $O_2(\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i)$
de rază $r_2 = 1$1p

Cum $d(O_1, O_2) = |i - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i| = |-\sqrt{2} + i(-\sqrt{2})| = 2$, ...2p

rezultă cele două discuri sunt tangente exterior. ...1p

Unicul punct comun e mijlocul segmentului $[O_1O_2]$, ...1p

$$\text{deci } z = \frac{i + \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i}{2} \Rightarrow A \cap B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \right\} \quad \dots 1p$$

4. Fie $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Determinați numerele $z \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că $\bar{z} + z^n = i(\bar{z} - z^n)$.

Soluție:

$$\bar{z} + z^n = i(\bar{z} - z^n) \Leftrightarrow z^n(1 + i) = \bar{z}(-1 + i) \quad (*) \quad \dots 1p$$

Trecând la modul ultima relație, obținem $|z|^n = |\bar{z}| = |z|$...1p

Deci $|z| = 0$ sau $|z| = 1$1p

Pentru $|z| = 0$ avem soluția $z = 0$1p

Pentru $|z| = 1$ rezultă că $\bar{z} = \frac{1}{z}$ și înlocuind în (*), obținem

$$z^{n+1} = \frac{-1 + i}{1 + i} \Leftrightarrow z^{n+1} = i \Leftrightarrow z^{n+1} = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \quad \dots 2p$$

$$\text{Prin urmare } z = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n+1} + i \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n+1}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \quad \dots 1p$$