

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

Aflați numerele naturale a și b pentru care $4 \cdot [a, b] + 7 \cdot (a, b) = 124$. Am notat $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b și (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică nr. 10/2018, Nicolae Halmagiu, Fetești, Ialomița

Soluție:

Din $7 \cdot (a, b) = 124 - 4 \cdot [a, b] = 4 \cdot [31 - (a, b)]$ și $(4, 7) = 1$ rezultă că $4 | (a, b)$ 1p
 Dacă $(a, b) = 8$, atunci $[a, b] = 17$, ceea ce este imposibil..... 1p
 Dacă $(a, b) \geq 12$, atunci $[a, b] \leq 10$, ceea ce este absurd..... 1p
 Rezultă că $(a, b) = 4$ și $[a, b] = 24$ 1p
 Fie $a = 4x, b = 4y$, cu $(x, y) = 1$. Rezultă că $[a, b] = 4xy$, de unde găsim $xy = 6$ 1p
 Avem variantele: $x = 1, y = 6$ de unde găsim $a = 4$ și $b = 24$, 0,5p
 $x = 6, y = 1$ de unde găsim $a = 24$ și $b = 4$, 0,5p
 $x = 2, y = 3$ de unde găsim $a = 8$ și $b = 12$, 0,5p
 $x = 3, y = 2$ de unde găsim $a = 12$ și $b = 8$ 0,5p

SUBIECTUL II

a) Prețul unui produs se majorează succesiv, de două ori, cu 25% după care are loc o reducere. Vânzatorul constată că prețul final este același cu cel inițial. Cu ce procent s-a redus prețul?

b) După o creștere cu 25%, un produs se mai scumpește cu $p\%$, apoi se ieftinește cu $q\%$ (unde p și q sunt numere naturale nenule). Determinați perechile de numere (p, q) pentru care prețul final reprezintă 5% din prețul inițial.

Prof. Ana – Maria Drăghici, Liceul "Constantin Brâncoveanu" Horezu

Soluție:

a) Fie x prețul inițial al produsului. După prima scumpire el costă $x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x$ 1p
 iar după a doua scumpire costă $\frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{5}{4}x \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}x$ 1p
 după ieftinire: $\frac{25}{16}x - \frac{p}{100} \cdot \frac{25x}{16} = x \Rightarrow$ finalizare $p\% = 36\%$ 1p
 b) Fie x prețul inițial al produsului. După prima scumpire el costă $x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x$
 iar după a doua scumpire costă $\frac{5}{4}x + \frac{p}{100} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{5}{4}x \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ 1p
 după ieftinire: $\frac{5}{4}x \left(1 + \frac{p}{100}\right) - \frac{q}{100} \cdot \frac{5}{4}x \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{5}{4}x \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right)$ 1p
 iar $\frac{5}{4}x \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right) = \frac{5}{100}x \Leftrightarrow (100 + p)(100 - q) = 400$ 1p
 $100 - q < 100$ și $100 + p > 100 \Rightarrow$ finalizare $(p, q) \in \{(300, 99), (100, 98)\}$ 1p

SUBIECTUL III

a) Demonstrați că nu există numere prime a și b pentru care $3a + 5b = 2019$.

b) Determinați numerele prime a, b, c pentru care $3a + 10b + 20c = 276$.

Prof. Constantin Popescu, Școala Gimnazială „Take Ionescu”, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) Dacă $a \neq 2$ și $b \neq 2$, atunci a și b sunt impare (sau ambele pare), atunci $3a + 5b$ este par, ceea ce este fals..... 1p
Dacă $a = 2$, atunci $5b = 2013$ și $b \notin \mathbb{N}$ 1p
Dacă $b = 2$, atunci $3a = 2009$ și $a \notin \mathbb{N}$ 1p

b) Din $3a = 2 \cdot (138 - 5b - 10c)$ rezultă a este prim și par, deci $a = 2$ 1p

Avem $10b + 20c = 270 \Leftrightarrow b + 2c = 27$.

Dacă $c \geq 13 \Rightarrow b \leq 1$, ceea ce este neconvenabil. Rezultă $c \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Pentru $c = 3$ găsim $b = 21$ - număr compus.....1p

Găsim soluțiile: $(2, 23, 2), (2, 17, 5), (2, 13, 7), (2, 5, 11)$ 2p (0,5p fiecare soluție)

SUBIECTUL IV

a) Două unghiuri complementare au măsurile exprimate prin numere naturale, unul fiind pătratul celuilalt. Aflați măsurile celor două unghiuri.

b) Se consideră unghiurile MON, NOP și POM în jurul punctului O și OA, OB , respectiv OC bisectoarele acestora. Dacă unghiurile AOB, BOC și AOC au măsurile exprimate prin numere naturale, multipli consecutivi ai lui 5, determinați măsurile unghiurilor MON, NOP, POM .

Prof. Tiberiu Pigui, Liceul Sanitar „Antim Ivireanu”, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) n și n^2 măsurile unghiurilor, deci $n + n^2 = 90^\circ$ 1p
 $n(n + 1) = 90^\circ$, 90 se scrie $9 \cdot 10$ ca produs de numere naturale consecutive, deci $n = 9$ 2p

b) $m(\widehat{AOB}) = n$, atunci $m(\widehat{BOC}) = n + 5^\circ, m(\widehat{AOC}) = n + 10^\circ, n \in M_5$
 $n + n + 5^\circ + n + 10^\circ = 360^\circ$, de unde $n = 115^\circ \in M_5$ 1p

Dacă $m(\widehat{MON}) = 2x, m(\widehat{NOP}) = 2y$ și $m(\widehat{POM}) = 2z$, atunci:

$x + y = 115^\circ, y + z = 120^\circ, z + x = 125^\circ$ 1p

Dar $2x + 2y + 2z = 360^\circ$, deci $x + y + z = 180^\circ$,

de unde $x = 60^\circ, y = 55^\circ, z = 65^\circ$ 1p

$m(\widehat{MON}) = 120^\circ, m(\widehat{NOP}) = 110^\circ, m(\widehat{POM}) = 130^\circ$ 1p