

Soluții și bareme orientative

Clasa a XII-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Avem $f_u(x, y) \circ f_v(x, y) = f_u\left(x + vy + \frac{v^2}{2}, y + v\right) =$
 $= \left(x + vy + \frac{v^2}{2} + u(y + v) + \frac{u^2}{2}, y + u + v\right) = \left(x + y(u + v) + \frac{(u + v)^2}{2}, y + u + v\right) =$
 $= f_{u+v}.$ (2p)

$f_0(x, y) = (x, y),$ (1p)

$f_t^{-1}(x, y) = \left(x + (-t)y + \frac{(-t)^2}{2}, y + (-t)\right) = f_{-t}(x, y), \forall (x, y) \in E.$ (1p)

b) Rezultă din punctul a). (1p)

c) Se definește $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G, \varphi(x) = f_x, x \in \mathbb{R}$ și se arată că φ este izomorfism. (2p)

2. Dacă $x \in H_m, y \in H_n \Rightarrow x^m = 1, y^n = 1 \Rightarrow (xy)^{[m,n]} = x^{[m,n]} \cdot y^{[m,n]} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow xy \in H_{[m,n]} \Rightarrow H_m \cdot H_n \subseteq H_{[m,n]} (1).$ (2p)

Dacă $z \in H_{[m,n]} \Rightarrow z = z^{[m,n]+1}$ și dacă $d = (m, n)$, atunci $m = da, n = db$, unde
 $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = au + bv$,
 $z = z^{[m,n]+1} = z^{dab+1} = z^{dab+au+bv} = z^{dab+au} \cdot z^{bv} = z^{au} \cdot z^{bv}.$ (2p)

Alegem $x = z^{bv}, y = z^{au}$ și obținem că $x^m = (z^{bv})^{da} = (z^{dab})^v = 1, y^n = (z^{au})^{db} =$
 $(z^{dab})^u = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in H_m, y \in H_n$ și $z = xy$. Avem deci $H_{[m,n]} \subseteq H_m \cdot H_n (2).$ (2p)

Din (1), (2) rezultă $H_m \cdot H_n = H_{[m,n]}.$ (1p)

3. a) Fie $Q(tgx) = a_k t g^k x + a_{k-1} t g^{k-1} x + \dots + a_1 t g x + a_0$. Atunci:

$(e^x \cdot Q(tgx))' = e^x Q(tgx) + e^x Q'(tgx)(1 + tg^2 x) =$
 $= e^x (Q(tgx) + Q'(tgx) + tg^2 x \cdot Q'(tgx)),$ (2p)

$P(tgx) = Q'(tgx) + Q(tgx) + tg^2 x \cdot Q'(tgx), \text{grad} Q = \text{grad} P - 1.$ (1p)

b) Conform cu a), se caută o primitivă a funcției

$e^x(2tg^3 x + 3tg^2 x + 4tgx + 2)$ de forma: $e^x(atg^2 x + btgx + c) = F(x), F: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R},$

$F'(x) = e^x(atg^2 x + btgx + c + 2atgx \cdot (1 + tg^2 x) + b(1 + tg^2 x)) =$
 $= e^x(2atg^3 x + (a + b)tg^2 x + (b + 2a)tgx + c + b) = e^x(2tg^3 x + 3tg^2 x + 4tgx + 2).$ (3p)

Prin identificare, $a = 1, b = 2, c = 0$. Rezultă că:

$\int e^x(2tg^3 x + 3tg^2 x + 4tgx + 2)dx = e^x(tg^2 x + 2tgx) + C.$ (1p)

4. Deoarece $\sin x > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, avem $f(x) = \frac{x}{1+\{\sin x\}} = \begin{cases} \frac{x}{1+\sin x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Atunci $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{x}{1+\sin x} dx.$ (1p)

Cu schimbarea de variabilă $t = \pi - x$, $dt = -dx$, avem

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx = -\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\pi - t}{1 + \sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\pi}{1 + \sin t} dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)dt \Rightarrow$$

(3p)

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{1 + \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}} dx = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\left(tg \frac{x}{2} \right)'}{\left(1 + tg \frac{x}{2} \right)^2} dx = -\frac{\pi}{1 + tg \frac{x}{2}} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\pi}{3 + \sqrt{3}} + \frac{\pi}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

(3p)