

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X - a

Problema 1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (n radicali). Să se arate că, pentru orice $n \geq 1$, au loc relațiile:

$$a) x_n < 2; \quad b) 4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n.$$

Barem de corectare. Se observă că $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Se verifică prin inducție (4p)

b) Pentru orice $n \geq 1$, avem $4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n \Leftrightarrow 4x_{n+1} < x_n + 6 \Leftrightarrow 4\sqrt{2 + x_n} < x_n + 6 \Leftrightarrow (2 - x_n)^2 > 0$ ceea ce, deoarece $0 < x_n < 2$, este evident adevărat (3p)

Problema 2. Să se determine funcțiile injective $f, g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, care satisfac relațiile:

$$a) f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty);$$

$$b) g(x \cdot g(y)) = \frac{1}{g(g(x) \cdot y)}, \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty).$$

Barem de corectare. a) Din ipoteză, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$, rezultă că $f(x \cdot f(y)) = f(y \cdot f(x)) = f(x) \cdot f(y)$, de unde din injectivitatea lui f , obținem că $x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$. Așadar $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, de unde rezultă că există un $a > 0$, astfel încât $\frac{f(x)}{x} = a$, $\forall x \in (0, +\infty)$, adică $f(x) = a \cdot x$, $\forall x \in (0, +\infty)$ (3p)

b) Dacă în relația din enunț luăm $y = x$, obținem că $[g(x \cdot g(x))]^2 = 1$, de unde rezultă că $g(x \cdot g(x)) = 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Cum funcția g este injectivă, există un $a > 0$, astfel încât $x \cdot g(x) = a$, $\forall x \in (0, +\infty)$, adică $g(x) = \frac{a}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ (3p)

Verificarea soluțiilor obținute la punctele a) și b) (1p)

Problema 3. Să se calculeze $|z_1 + z_2 + z_3|$, știind că z_1, z_2 și z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Să se găsească trei numere complexe z_1, z_2 și z_3 care verifică aceste relații.

Barem de corectare. Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, rezultă că $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ și $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$, .. (2p)

iar din $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, rezultă că $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ (1p)

Așadar, dacă $z = z_1 + z_2 + z_3$, atunci $\bar{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{z_1z_2z_3} = \frac{z^2}{2 \cdot z_1z_2z_3}$ și $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{z^3}{2 \cdot z_1z_2z_3}$. Astfel, obținem că $z^3 = 2 \cdot z_1z_2z_3 \cdot |z|^2 \Rightarrow |z|^3 = 2 \cdot |z|^2$, adică $|z| = 2$. (3p)

De exemplu, numerele 1 și $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ satisfac relațiile din problemă (1p)

Problema 4. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \leq 1$$

Barem de corectare. Dacă $s \in \begin{cases} (0, 1), & \text{dacă } a, b, c \in (0, 1) \\ (1, +\infty), & \text{dacă } a, b, c \in (1, +\infty) \end{cases}$ și notăm $\log_s a = A$,

$\log_s b = B$, $\log_s c = C$, atunci $A, B, C > 0 \dots\dots\dots (1p)$

Inegalitatea se scrie echivalent

$$\begin{aligned} \frac{A}{2A+B} + \frac{B}{2B+C} + \frac{C}{2C+A} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{2A}{2A+B} + \frac{2B}{2B+C} + \frac{2C}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{B}{2A+B} + 1 - \frac{C}{2B+C} + 1 - \frac{A}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} \geq 1 \dots (4p) \end{aligned}$$

Dar, din inegalitatea lui Titu Andreescu obținem $\frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} = \frac{B^2}{B(2A+B)} +$

$\frac{C^2}{C(2B+C)} + \frac{A^2}{A(2C+A)} \geq \frac{(B+C+A)^2}{B(2A+B) + C(2B+C) + A(2C+A)} = 1$, ceea ce demonstrează inegalitatea dată. $\dots\dots\dots (2p)$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.