

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 25 IANUARIE 2014

Clasa a IX-a

Problema 1. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ arătați că:

- a) $(a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca+c-a-1)$;
 b) $(a+1)b + (c-1)b + (a+1)(c-1) \leq (a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2$;
 c) $ab+bc+ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

Adriana Constantin, Călărași

Problema 2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x+y \neq 0$ și $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale. Arătați că:

- a) Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt progresii aritmetice atunci șirul $(c_n)_{n \geq 1}$, definit prin $c_n = a_n b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, este progresie aritmetică dacă și numai dacă una din progresiile aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ sau $(b_n)_{n \geq 1}$ are rația egală cu 0.
 b) Dacă $(1+xa_{n+1})(1+ya_n)=1, (x+y)(a_n b_n - 1) = xy a_n$ și $(x+y)b_n - xy \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ atunci șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_1 = \frac{1}{6}$ și $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(a_n + \frac{1}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinați a_{2014} .

Gazeta Matematică

Problema 4. Dacă ABC este un triunghi oarecare și E, F, O, M sunt puncte cu proprietățile $E \in (AB), F \in (AC), O \in (EF), M \in (BC), 2\overline{BM} = \overline{BC}, 5\overline{AE} = 7\overline{EB}$ și $12\overline{OM} = 3\overline{AB} + 2\overline{AC}$ demonstrați că $EF \parallel BC$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SUCCESE!**Baremul de notare este:** Problema 1. a) 1 puncte; b) 2 puncte; c) 4 puncte; Problema 2. a) 4 puncte; b) 3 puncte; Problema 3. 7 puncte; Problema 4. 7 puncte.