



Olimpiada de Matematică-Etapa locală
Maramureș-23 februarie 2019
Clasa a VI-a
Barem de corectare

1. a) Aflați a 2019-a zecimală a numărului $n = 2,019(2019)$.
 b) Determinați suma numerelor naturale x pentru care $\frac{28}{2x+1} \in \mathbb{N}$.

Barem

- a) Cele 2019 zecimale se împart astfel
 3 zecimale în partea neperiodică și parte periodică formată din 4 cifre 1p
 $2016 = 4 \cdot 504$ zecimale, partea periodică 1p
 a 2019-a zecimală a numărului $n = 2,019(2019)$ este 9 1p
- b) $2x + 1$ este număr impar 0.5p
 $2x + 1$ este divizor al lui 28 1p
 deci $2x + 1 \in \{1, 7\}$ 1p
 cu $x \in \{0, 3\}$ 1p
 Se obține suma $0 + 3 = 3$ 0.5p

2. Arătați că numărul $A = 4^{2019} + 3$ nu poate fi scris ca sumă de două numere prime.

Barem

- $A = 4^{2019} + 3$ este număr impar 1p
 Cum $A = 4^{2019} + 3 = a + b$ este un număr impar, se deduce că un termen al sumei
 $a + b$ este număr par. 0.5p
 Fie a par și prim, deci $a = 2$. 1p
 Se obține $b = 4^{2019} + 1$, 0.5p
 cu $u(b) = u(4^{2019} + 1) = u(4^{2 \cdot 1009 + 1}) + 1 = 4 + 1 = 5$ 2p
 Deci $5|b$ cu $b > 5$, rezultă b este număr compus. 1p
 În concluzie, $A = 4^{2019} + 3$ nu poate fi scris ca sumă de două numere prime 1p

3. a) Arătați că numerele de forma $\overline{abb}$, scrise în baza 10, sunt divizibile cu 7 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este un număr natural divizibil cu 7.

- b) Determinați numerele de forma $\overline{abb}$, scrise în baza 10, divizibile cu 7 care au cifrele de aceeași paritate.

Barem

- a) Problema revine la $\overline{abb} : 7 \Leftrightarrow (a + 2b) : 7$ 0.5p
 $\rightarrow$ Implicația $\overline{abb} : 7 \Rightarrow (a + 2b) : 7$ 0.25p
 $\overline{abb} = 7(14a + b) + 2a + 4b$ 0.5p
 Dacă $\overline{abb} : 7$, atunci $7(14a + b) + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + 2b) : 7$ 0.5p
 Deci $2(a + 2b) : 7$ 0.25p
 Cum $(2, 7) = 1$, rezultă $(a + 2b) : 7$ 0.25p
- $\leftarrow$ Implicația $(a + 2b) : 7 \Rightarrow \overline{abb} : 7$ 0.25p
 Dacă $7|a + 2b$, atunci $7|2a + 4b$. 0.25p
 Cum $7|98a + 7b$, atunci $7|98a + 2a + 7b + 3b + b$ 0.5p
 Deci $7|\overline{abb}$ 0.25p
- b) Dacă $\overline{abb} : 7$, atunci $(a + 2b) : 7$ 0.5p
 Cum $a + 2b \leq 27$, se obține $a + 2b \in \{7, 14, 21\}$ 0.5p



Pentru a număr par, $a + 2b$ este par, deci $a + 2b = 14$

Ținând cont că b este număr par avem soluțiile $(a, b) \in \{(2, 6), (6, 4)\}$

1p

Pentru a număr impar, $a + 2b$ este impar, deci $a + 2b \in \{7, 21\}$

Ținând cont că b este număr impar avem soluțiile

1p

$(a, b) \in \{(1, 3), (5, 1), (3, 9), (7, 7)\}$

$\overline{abb} \in \{133, 266, 399, 511, 644, 777\}$

0.5p

4. Fie unghiurile $\sphericalangle A_1, \sphericalangle A_2, \sphericalangle A_3, \dots, \sphericalangle A_n, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $0^\circ < m(\sphericalangle A_1) < 90^\circ$, A_2 este complementul unghiului A_1 , A_3 este suplementul unghiului A_2 , A_4 este suplementul unghiului A_3 și A_5 este complementul unghiului A_4 , A_6 este complementul unghiului A_5 , A_7 este suplementul unghiului A_6 , A_8 este suplementul unghiului A_7 , A_9 este complementul unghiului A_8 și așa mai departe.

a) Dacă $m(\sphericalangle A_1) = 40^\circ$, determinați $m(\sphericalangle A_5)$.

b) Determinați $m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle A_2) + \dots + m(\sphericalangle A_{100})$.

Barem

a) $m(\sphericalangle A_2) = 50^\circ$ 0.5p

$m(\sphericalangle A_3) = 130^\circ$ 0.5p

$m(\sphericalangle A_4) = 50^\circ$ 0.5p

$m(\sphericalangle A_5) = 40^\circ$ 0.5p

b) Măsurile unghiurilor se repetă din 4 în 4 1p

Suma măsurilor a 4 unghiuri consecutive este

$s = a + (90^\circ - a) + (90^\circ + a) + (90^\circ - a) = 270^\circ$ 2p

Suma măsurilor celor 100 de unghiuri este $S = 25s$

1p

$S = 6750^\circ$ 1p