OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

Subiecte:

1. Fie a, b, c numere raționale nenule astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = abc$. Să se arate că numărul $\sqrt{(1 + a^2b^2)(1 + b^2c^2)(1 + c^2a^2)}$ este rațional.

2. Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ care verifică relațiile: $\begin{cases} 25x^2 + 20y^2 + 13z^2 \leq 1952 \\ 3xy + 6yz + 4zx = 488 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

3. Fie piramida $SABCD$, a carei bază $ABCD$ este un romb cu latura de lungime 1, iar muchiile laterale ale piramidei au lungimile exprimate prin numere naturale nenule.
   a) Arătați că triunghiurile SAB, SBC, SCD, SDA sunt congruente
   b) Arătați că $ABCD$ este pătrat;
   c) Dacă $SC \perp SA$, atunci determinați sinusul unghiului plan al unghiului diedru determinat de planele (SBC) și (ABC).

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

4. Pe înălțimea din C a triunghiului ABC se consideră un punct D. Dacă M este un punct în spațiu astfel încât $MD \perp (ABC)$, să se arate că $MA^2 + BC^2 = MB^2 + AC^2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.