



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 22 februarie 2015

BAREM DE CORECTARE

Clasa a X- a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Inecuația este echivalentă cu: $(\sqrt{2} + 1)^{2x} - 6 \cdot (\sqrt{2} + 1)^x + 1 \leq 0$1p

Notăm cu $t = (\sqrt{2} + 1)^x > 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 1 \leq 0$, care are ca soluții

$$t \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}] \Rightarrow (\sqrt{2} + 1)^{-2} \leq (\sqrt{2} + 1)^x \leq (\sqrt{2} + 1)^2 \text{1p}$$

Cum funcția exponențială $f(x) = (\sqrt{2} + 1)^x$ este strict crescătoare $\Rightarrow x \in [-2, 2]$ 1p

b) Găsește $x=1$ soluție.....1p

Împarte cu $^{10}\sqrt{x}$ și obține ecuația $\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[30]{x^7} = \sqrt[10]{1 + \frac{1023}{x}}$1p

Observă că funcția $x \rightarrow \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[30]{x^7}$ este crescătoare, iar $x \rightarrow \sqrt[10]{1 + \frac{1023}{x}}$

este o funcție descrescătoare $\Rightarrow$ Cerința2p

SUBIECTUL II (7 p)

Relația este echivalentă cu: $\left| a - \frac{b+c}{2} \right| = \frac{|b-c|}{2}$1p

Notează cu M mijlocul laturii BC.....1p

Afixul lui M este $\frac{b+c}{2}$1p

Distanța dintre B și C este $|b - c|$1p

Rescrie egalitatea de mai sus $AM = \frac{BC}{2}$1p

Deduce că A se află pe cercul de diametru BC.....1p

Concluzia $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$1p



SUBIECTUL III (7 p)

Soluție. a) Inegalitatea e echivalentă cu

$$\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1} (a+2) < 1. \quad \dots\dots\dots 1p$$

Să observăm că

$$\log_{a+1} a + \log_{a+1} (a+2) = \log_{a+1} (a^2 + 2a) < \log_{a+1} (a^2 + 2a + 1) = 2, \quad \dots\dots\dots 1p$$

și atunci (*) se obține din inegalitatea mediilor $\dots\dots\dots 1p$

b) Fie

$$A = \log_5 4 \cdot \log_7 6 \cdot \dots \cdot \log_{81} 80 \quad \dots\dots\dots 1p$$

și

$$B = \log_4 3 \cdot \log_6 5 \cdot \dots \cdot \log_{80} 79. \quad \dots\dots\dots 1p$$

Atunci din a) avem $A > B$ iar $AB = \frac{1}{4}$. Deducem $A > \frac{1}{2}$ $\dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL IV (7 p)

a) $\{1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ este mulțimea rădăcinilor complexe de ordin trei ale unității $\dots\dots\dots 1p$

$$(\varepsilon^3 = 1, \bar{\varepsilon} = \varepsilon^2). \text{ Avem } 1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0 \text{ și } 1^2 + \varepsilon^2 + \bar{\varepsilon}^2 = 1^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0 \quad (\varepsilon^3 = 1) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{de unde } (z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2 = 3z^2 + (1^2 + \varepsilon^2 + \bar{\varepsilon}^2) - 2z(1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 3z^2. \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) Alegem un sistem de axe cu originea în O, Ox=OA și unitatea de măsură OA=OB=OC. $\dots\dots\dots 1p$

Punctele A, B, C au afixele

$$1, \varepsilon, \text{ respectiv } \bar{\varepsilon} \text{ și avem } MA^2 + MB^2 + MC^2 = |z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\bar{\varepsilon}|^2 \geq |(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2|$$

$$= 3|z|^2 = 3OM^2 \text{ dacă } z \text{ este afixul punctului } M. \quad \dots\dots\dots 3p$$