

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A XII-A, SUBIECTE

1. Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu elementul neutru e . Să se arate că dacă $a^2 \neq a$ pentru orice $a \in M \setminus \{e\}$, atunci $(M, \cdot)$ este grup.

Gazeta Matematică

2. Fie funcțiile $f, g, G: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(3 + \ln x)(5 + \ln x)}$, $g(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$, $a > 0$ și $G(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Arătați că G este o primitivă a lui g pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $[1, +\infty)$ cu proprietatea $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$.

Mădălina Teodorescu, Brăila

3. Pe mulțimea $(0, \infty)$ definim legea de compoziție “ $*$ ”, $*: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietățile:

i) $(x + 2) * x = 1$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$; ii) $(x \cdot y) * z = x \cdot (y * z)$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$.

a) Calculați $(n + 1) * (2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că legea de compoziție “ $*$ ” nu este asociativă și nu admite element neutru.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f'(x^{2019} + 1) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = 0$. Dacă F este o primitivă a funcției f , calculați $F(0) - F(1)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

2. Listele cu elevii calificați la etapa județeană și baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-urile: www.isjbraila.ro, secțiunea Discipline/Domenii, Matematică și <http://ssmrbraila.weebly.com/>