



S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică

Faza locală 13.02.2015

Barem Clasa a X-a

SUBIECTUL I Se consideră funcțiile

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}, g(x) = 4x + 2\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{5x^2 + 4x\sqrt{x^2 + 1} + 2}$. Să se demonstreze că f și g sunt bijective.

Soluție. $f(x) = y \Rightarrow y^2 - 4xy + 3x^2 - 1 = 0, \Delta = 4x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f$ surjectivă2p

$$x > y > 0 \Rightarrow f(x) > f(y)$$

$$x > 0 > y \Rightarrow f(x) > f(0) > f(y) \Rightarrow f \text{ injectivă3p}$$

$$x < y < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Deci, f bijectivă. Funcția $g = f \circ f \Rightarrow g$ bijectivă2p

SUBIECTUL II Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [2, 3]$. Arătați că

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n, n \geq 1$$

Soluție. cum $a_i \in [2, 3] \Rightarrow a_i^2 - 5a_i + 6 \leq 0 \Rightarrow 5a_i - 6 \geq a_i^2$ 2p

logaritmăm inegalitatea, deci $\log_{a_i}(5a_{i+1} - 6) \geq \log_{a_i} a_{i+1}^2 = 2 \log_{a_i} a_{i+1}$, cu $a_{n+1} = a_1$ 1p

adunăm inegalitățile

$$\Rightarrow \log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1)$$

.....1p

aplicând inegalitatea mediilor obținem

$$2(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1) \geq 2n \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_1} = 2n$$

.....3p

SUBIECTUL III Arătați că, dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ și $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$,

atunci

$$\left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Dacă notăm cu z produsul, atunci încercăm să demonstrăm că $\bar{z} = z$ ceea ce va implica $z \in \mathbb{R}$(2p)



$$\text{Avem } \bar{z} = \left(1 + \frac{\bar{z}_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{\bar{z}_3}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\bar{z}_n}{z_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{\bar{z}_1}{z_n}\right) \dots (1p)$$

$$\text{Dar } \frac{\bar{z}_{k+1}}{z_k} = \frac{\frac{|z_{k+1}|^2}{z_{k+1}}}{\frac{|z_k|^2}{z_k}} = \frac{z_k}{z_{k+1}} \dots (2p)$$

$$\begin{aligned} \text{Atunci } \bar{z} &= \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \left(1 + \frac{z_2}{z_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{z_{n-1}}{z_n}\right) \left(1 + \frac{z_n}{z_1}\right) = \\ &= \frac{z_2 + z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3 + z_2}{z_3} \cdot \dots \cdot \frac{z_n + z_{n-1}}{z_n} \cdot \frac{z_1 + z_n}{z_1} = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{z_1} \cdot \frac{z_2 + z_3}{z_2} \cdot \dots \cdot \frac{z_n + z_1}{z_n} = \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) = z \dots (2p) \end{aligned}$$

SUBIECTUL IV Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $z_1 \neq z_2$ astfel încât $|z_1| = |z_2|$, $z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbb{R}$, $z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbb{R}$.

Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbb{R}$, $z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbb{R}$.

Soluție. $z_1 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = r(\cos \beta + i \sin \beta)$ și $z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow r(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{\cos \beta - i \sin \beta}{r} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow r \sin \alpha - \frac{\sin \beta}{r} = 0 \Rightarrow r^2 \sin \alpha = \sin \beta. \dots \dots \dots 2p$$

$$z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbb{R} \Rightarrow r^2 \sin \beta = \sin \alpha \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Deci } \Rightarrow r^4 \sin \beta = \sin \beta \Rightarrow \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Deci } z_1 = r \text{ și } z_2 = -r, \text{ sau invers, de unde } z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbb{R}, z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbb{R} \text{ pentru}$$

orice $n \in \mathbb{N} \dots \dots \dots 2p$

Dacă $r=1 \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ de unde rezultă că $z_1 = z_2$, fals. ..1p

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem