INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a V-a

SUBIECTUL I

Dacă 3 caiete şi 5 pixuri costă 22 lei iar 4 caiete şi 2 pixuri costă 20 lei, cât costă 10 caiete şi 15 pixuri.

autor prof.Chiş Maria

Barem de corectare

Adunând obținem că 7 caiete şi 7 pixuri costă în total 42 lei....................................... (2p)

Aşadar 1 caiet şi 1 pix costă 42 lei : 7 =6 lei...(1p)

Înmulțind cu 3 obținem că 3 caiete şi 3 pixuri costă 18 lei , scăzând din relația din enunțul problemei : 3 caiete şi 5 pixuri costă 22 lei, obținem pentru 2 pixuri prețul

de 4 lei , deci 1 pix costă 4 lei:2=2 lei...(2p)

6 lei – 2 lei = 4 lei costă un caiet..(1p)

10· 4 lei + 15· 2lei = 40 lei + 30 lei = 70 lei (10 caiete şi 15 pixuri)................................(1p)

SUBIECTUL II

Se dau numerele a şi b, $a > b$. Dacă la împărțirea lui a la diferența lor obținem câtul 2 şi restul , care este câtul şi restul împărțirii lui b la diferența lor?

E:14143, nr. 3/2010

Barem de corectare

Notând d=a-b avem a=2d+3. ....**2p**

Scăzând din ambii membri pe b obținem a-b=2d-b+3 ....**3p**

sau d=2d-b+3, de unde b=d+3. ....**1p**

Aşadar câtul şi restul împărţirii lui b la diferenţa a-b sunt 1, respectiv 3. ....**1p**

SUBIECTUL III

Arătaţi că numărul $n = 1 + 3 + 5 + ... + 2011 + 2013$ este pătrat perfect.

Barem de corectare

A= 1+2 +3+4……+2012+2013 - (2+4+6+…..+2012) 2p

A= 2013*(2013+1) : 2 - 2*(1+2+……+1006) 2p

A=1007*(2013 - 1006)= 1007^2 3p

SUBIECTUL IV

Fiind date numerele $a = 2^{2000} - 3 \cdot 2^{1998} - 3 \cdot 2^{1996} - 2^{1996}$ şi $b = 2^{1995}$ să se determine ultima cifră a numărului $a + b$

selectată de prof. Muresan Marius din Matematică, auxiliar, cl. A V-a, Ed.Gil)

Barem de corectare şi notare

a = 0…………………..2p

calculează a+b………..1p

scrie condiţiile pentru ultima cifră …1p

finalizare, $u\left(2^{1995}\right) = ...8$ ……………..3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a VI-a

SUBIECTUL I

Arătați că numărul $A = 2 \cdot (1+2+3+...+100) \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{100\cdot 101} \right)$ este pătrat perfect.

Propusă de prof. Marius Mureşan (Manual cl. a VII-a, Ed. Teora)

Barem de corectare şi notare

Calculează 1+2+3+…+100…………..2p

Scrie relația $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ …….1p

Calculează a doua paranteză………….2p

Finalizare……………………………..2p

SUBIECTUL II

Aflați numerele naturale a şi b ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este de 15 ori mai mare decât cel mai mare divizor comun al acestora şi $5a + 3b = 150$

E: 14397 GM 10 / 2012

Barem de notare

(**a**;**b**)=**d** $\Rightarrow$ **a**=**d**x, **b**=**d**y, (x;y)=1$\Rightarrow$ [**a**;**b**]=**d**xy 1p

[**a**;**b**]=15(**a**;**b**) $\Leftrightarrow$ **d**xy=15**d** $\Leftrightarrow$ xy=15 1p

(x;y)$\in$ {(1;15); (3;5); (5;3); (15;1)} 1p

(**a**;**b**)$\in$ {(**d**;15**d**); (3**d**;5**d**); (5**d**;3**d**); (15**d**;**d**)} 1p

5**a**+3**b**=150 $\Leftrightarrow$ **d**$\in\{3\ ;\ 5\ ;\ \frac{75}{17};\frac{75}{42}\}$, dar **d**$\in$**N**$\Rightarrow$ **d**$\in\{3\ ;\ 5\}$ 2p

(**a**;**b**)$\in$ {(3;15); (15;25)} 1p

SUBIECTUL III

a)Demonstrați că numărul **A**= $12^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este pătrat perfect, oricare ar fi *n,* număr natural.

b) Arătați că numărul **B** = $2^{2013} + 3^{2013}$ este divizibil cu 5.

autor prof.CHIS MARIA

Barem de notare

1\. a) **A** = $3^{2n+3} \cdot 2^{4n+6} - 2^{2n+1} \cdot 2^{2n+3} \cdot 3^{2n+3}$ 1p

A = $3^{2n+3} \cdot 2^{4n+4} (2^2 - 1)$ 1p

A = $3^{2n+4} \cdot 2^{4n+4} = (3^{n+2} \cdot 2^{2n+2})^2$ 1p

b) **B** este divizibil cu 5 dacă are ultima cifră 0 sau 5 1p

$U(2^{2011}) = U(2^{4.503+1}) = U(2^1) = 2$ 1p

$U(3^{2011}) = U(3^{4.503+1}) = U(3^1) = 3$ 1p

U(B) = U(2+3) = U(5) = 5 1p

SUBIECTUL IV

Se consider unghiul MON cu măsura de 90^0 și punctele coliniare A,O,B astfel încât $O \in (AB)$ .Dacă (OE este bisectoarea unghiului AOM iar (OF este bisectoarea unghiului BON,arătați că m(<EOF) = 45^0 sau m(<EOF) = 135^0.

Selectată de prof. POPAN TIBI VASILE, **G.M. nr. 1 - 2010**

Barem de notare

m(<AON) + m($< BOM$) = 90^0 ……………………………….1p

m($< AOE$) $= 45^0 + \frac{1}{2} m(< AON)$……………………………...1p

$m(< BOF) = 45^0 + \frac{1}{2} m(< BOM)$ ……………………………… 1p

Finalizare $m(< EOF) = 45^0$ ………………………………………..1p

Pentru cazul dreapta AB prin interiorul unghiului ………………3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a VII-a

SUBIECTUL I

Fie numărul $A=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{1+2+3+4}}+\dots\dots\dots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{1+2+3+\dots\dots+n}}$.

Determinați numărul natural n, astfel încât valoarea lui A să fie $\frac{n-5}{n+1}$.

autor prof. Bréda Francis

Barem de corectare

$$A=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{4\cdot 5}}+\dots\dots\dots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}\right)\dots\dots\dots\dots 2p$$

$$A=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\sqrt{\frac{2}{n+1}}\dots\dots\dots\dots 2p$$

$$1-\sqrt{\frac{2}{n+1}}=\frac{n-5}{n+1}\ \to\ \sqrt{\frac{2}{n+1}}=\frac{6}{n+1}\ \to\ \frac{2}{n+1}=\frac{36}{(n+1)^2}\ \to n=17\dots\dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL II

Să se determine toate perechile de numere naturale (x,y) care satisfac condiția: $x^3\cdot y=1512-x^3$.

autor Valeriu Gornoavă

Barem de notare

$x^3\cdot y=1512-x^3 \Leftrightarrow x^3\cdot y+x^3=1512 \Leftrightarrow x^3(y+1)=1512$. 2p

Dar $1512=1^3\cdot 1512=2^3\cdot 189=3^3\cdot 56=6^3\cdot 7$. 2p

Rezulta ca in multimea numerelor naturale

$(x^3;y+1)\in\{(1^3;1512);(2^3;189);(3^3;56);(6^3;7)\}$. 1,5p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

De unde avem $(x;y)\in\{(1;1511);(2;188);(3;55);(6;6)\}$ 1,5p

SUBIECTUL III

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi cu $m(<B)=60^\circ$, iar D şi E pe latura BC astfel încât $m(<CAD)=10^\circ$ şi $(AE$ bisectoarea unghiului $<BAD$. Arătați că $[AD]\equiv[CE]$.

G.M. nr. 5/2012

Barem de corectare

Calculum măsurilor unghiurilor..........................1p

ΔEAD isoscel de unde $m(<AED)=140^\circ$ 1p

F simetricul lui E fața de AC de unde rezultă că ΔCEF echilateral $\Rightarrow CE\equiv EF$ 2p

ΔAEF isoscel $\Rightarrow m(<FAE)=100^\circ$ 1p

$\Rightarrow \Delta AEF\equiv\Delta EAD \Rightarrow EF\equiv AD$; dar $CE\equiv EF\Rightarrow AD\equiv CE$

SUBIECTUL IV

Fie $[AB]$ un segment şi M mijlocul lui. În acelaşi semiplan față de AB se consider punctele C şi D iar în semiplanul opus se consideră punctul E astfel încât triunghiurile ADM, BCM, ABE să fie echilaterale. Demonstrați că:

a) $A_{ABCD}=\frac{3}{4}.A_{ABE}$

b) $AN=NP=PB$ unde $\{N\}=DE\cap AB$ şi $\{P\}=CE\cap AB$

Propusa de prof. Cosma Dorin

Barem de corectare

a) $A_{ABCD}=A_{ADM}+A_{DCM}+A_{BCM}=3A_{ADM}$..1p,
$A_{ABE}=4A_{ADM}$, căci ΔABE □ΔADM.. 2p.

c) $\Delta DNM \sim \Delta ENA$ (t.f.a)=> $\frac{NM}{AN} = \frac{DM}{AE} = \frac{1}{2}$ =>AN=2NM………………………… 2p.

CumBP=2MP…………………………………………………………………...1p

NM=MP=>AN=NP=PB………………………………………………………....1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Arătați că $A = \dfrac{9}{\sqrt{23+8\sqrt{7}}} + \sqrt{32+10\sqrt{7}} \in \mathbf{Z}$

b) Demonstrați că dacă *x,y,z* sunt numere întregi impare, atunci $y^2 - 4xz$ nu poate fi pătrat perfect.

Selectata de catre prof. Faluvégi Melania *din* Gazeta Matlap nr.10/2012

Barem de corectare

a) $\sqrt{23+8\sqrt{7}} = \sqrt{16+2\cdot 4\sqrt{7}+7} = \sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)^2} = \left|4+\sqrt{7}\right| = 4+\sqrt{7}$ 1p

$\sqrt{32+10\sqrt{7}} = \sqrt{25+2\cdot 5\sqrt{7}+7} = \sqrt{\left(5+\sqrt{7}\right)^2} = \left|5+\sqrt{7}\right| = 5+\sqrt{7} \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow A = \dfrac{9}{4+\sqrt{7}} + 5+\sqrt{7} = \dfrac{9\left(4-\sqrt{7}\right)}{16-7} + 5+\sqrt{7} = 4-\sqrt{7}+5+\sqrt{7} = 9 \in \mathbf{Z}$..........2p

b)Fie *x,y,z numere întregi impare, adică x=2n+1, y=2m+1, z=2p+1 şi presupunem că* $y^2 - 4xz$ *este pătrat perfect* $\Rightarrow y^2 - 4xz = (2m+1)^2 - 4(2n+1)(2p+1) = (2k+1)^2$, *deci:* $4m^2 + 4m + 1 - 4(4np+2n+2p+1) = 4k^2 + 4k + 1 \,|\text{-}1$..2p

$\Rightarrow 4m^2 + 4m - 4(4np+2n+2p+1) = 4k^2 + 4k \,|{:}4 \Rightarrow m^2 + m + -(4np+2n+2p+1) = k^2 + k \Rightarrow$ $m(m+1) - (4np+2n+2p+1) = k(k+1)$ *unde* $m(m+1)$ *şi* $k(k+1)$ *fiind numere pare* $\Rightarrow$ *4np+2n+2p+1 număr par, ceea ce este imposibil, deci presupunerea făcută este incorectă* $\Rightarrow y^2 - 4xz$ *nu este pătrat perfect.* 1p

SUBIECTUL II

Arătați că oricare ar fi n , număr rațional pozitiv nenul , astfel încât

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{n+2} + \ldots + \dfrac{2013}{n+2013} = 2012$, atunci $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+2013} = \dfrac{1}{n}$

autor Valeriu Gornoavă

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Barem de notare

$$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+...+\frac{2013}{n+2013}=2012 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n+1}-1\right)+\left(\frac{2}{n+2}-1\right)+...+\left(\frac{2013}{n+2013}-1\right)=-1 \Leftrightarrow$$ 2p

$$\Leftrightarrow \frac{-n}{n+1}+\frac{-n}{n+2}+...+\frac{-n}{n+2013}=-1 \Leftrightarrow$$ 2p

$$\Leftrightarrow n\cdot\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+2013}\right)=1 \Leftrightarrow$$ 1,5p

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+2013}=\frac{1}{n},$$ 1,5p

n număr raţional strict pozitiv .

SUBIECTUL II

În triunghiul ABC, AB = AC = 30 cm şi BC = 36 cm.Fie D mijlocul laturii BC . În punctul A se ridică perpendiculara AM = 10 cm,pe planul (ABC).

a)Calculaţi MB şi MD;

b)Fie [AE şi [AF bisectoarele unghiurilor MAB şi MAC ,E $\in$ (MB),F $\in$ (MC).Arătaţi că EF || (ABC);

c) Calculaţi lungimea segmentului EF.

Selectată de prof. POPAN TIBI VASILE Culegere de probleme –CLUBUL DE MATEMATICĂ Ă Ed. ART

Barem de notare

a)Calcularea lui MB=10$\sqrt{10}$……………………………………………………………………………1p

MD = 2…………………………………………………………………1p

b)

$\frac{MF}{FC}=\frac{MA}{MC}=\frac{1}{3}$………………………………………………………………………………1P

$\frac{ME}{EB}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$………………………………………………………………………………1P

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

$\frac{MF}{FC}=\frac{ME}{EB}=\frac{1}{3}\Rightarrow EF$||BC…………………………………..1P

EF||(ABC)……………………………………………………1P

c) EF = 9……………………………………………………………… 1p.

SUBIECTUL IV

Fie SABCD o piramidă patrulateră regulată AM ⊥SB, BN⊥SC, CP⊥SD,DQ⊥SA şi R simetricul lui N față de AC.

a) Demonstrați că punctele B,R,Q,D sunt coplanar.
b) Aflați măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ.

G.M.(Nr.5/2012)

<u>Barem</u>: a) figura 1p

QE⊥AC, NR∩AC={F} ⟹[AQ]≡[QN]

[AE]≡[CF], [OE]≡[OF] şi [EQ]≡[NF], AC∩BD={O} 1p

QE,NP⊂(SAC) şi QE⊥AC, NF⊥AC⟹QE‖NF 1p

[QE]≡[NF]≡[FR] ⟹EQFR paralelogram ⟹B,D,R,Q coplanare 1p

b) [BM]≡[DP] şi ΔSDB isoscel ⟹PM ‖BD 1p

∢(MP,QR) = ∢(BD,QR)

BD⊥(ASC), QN⊂(ASC) ⟹BD⊥OQ 1p

Finalizare 1p