OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f\left(f(x)y\right)+xy=2f(x)f(y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

G.M. 9/2013, enunț modificat

<u>Soluție</u>. $y=0\Rightarrow f(0)=2f(x)f(0),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(0)=0$ sau $f(x)=\dfrac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R}$. Cum funcția constantă nu verifică relația din enunț, în mod obligatoriu avem $f(0)=0$. Considerăm $y=1$ în relația dată și obținem

$$f\left(f(x)\right)+x=2f(x)f(1),\forall x\in\mathbb{R}\quad(1)$$

Arătăm că *f* este funcție injectivă. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=f(b)\Rightarrow f\left(f(a)\right)=f\left(f(b)\right)$. Folosind relația (1) pentru $x=a$ și $x=b$ se obține imediat că $a=b$.
Schimbând x cu y în relația din ipoteză obținem:

$$f\left(f(y)x\right)+xy=2f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}\text{, deci}$$

$$f\left(f(x)y\right)=f\left(f(y)x\right),\forall x,y\in\mathbb{R},$$

de unde , folosind injectivitatea funcției deducem: $f(x)y=xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.
Pentru y=1 obținem $f(x)=xf(1)$ și înlocuind în relația inițială rezultă

$$xy\cdot f^2(1)+xy=2xy\cdot f^2(1),\forall x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow xy=xy\cdot f^2(1),\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow f^2(1)=1\Rightarrow f(1)=\pm1.$$

În concluzie, funcțiile cerute sunt $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f_1(x)=x,f_2(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}.$

<u>Barem.</u>

Deduce $f(0)=0$.	1p
f este funcție injectivă	2p
Deduce $f(x)y=xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$	2p
Finalizare-găsește funcțiile..	2p

2. Să se demonstreze că $\dfrac{\log_2^2 a}{1+\log_2 b^2}+\dfrac{\log_2^2 b}{1+\log_2 c^2}+\dfrac{\log_2^2 c}{1+\log_2 a^2}\geq 1,\forall a,b,c\in[2,\infty).$

***

<u>Soluție.</u> Aplicăm inegalitatea CBS și obținem:

$$\frac{\log_2^2 a}{1+\log_2 b^2}+\frac{\log_2^2 b}{1+\log_2 c^2}+\frac{\log_2^2 c}{1+\log_2 a^2}\geq\frac{\left(\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c\right)^2}{3+2\left(\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c\right)}=\frac{\log_2^2(abc)}{3+2\log_2(abc)}\geq 1.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $\left(\log_2(abc)-1\right)^2\geq 4,$ adevărat, deoarece $\log_2(abc)\geq\log_2 8=3.$

<u>Barem.</u>

Aplică CBS și obține $\dfrac{\log_2^2 a}{1+\log_2 b^2}+\dfrac{\log_2^2 b}{1+\log_2 c^2}+\dfrac{\log_2^2 c}{1+\log_2 a^2}\geq\dfrac{\log_2^2(abc)}{3+2\log_2(abc)}$	5p
Demonstrează $\dfrac{\log_2^2(abc)}{3+2\log_2(abc)}\geq 1$	2p

3. Să se determine numerele complexe *x,y,z*, dacă $\begin{cases}xy=z^2+2z-x-y\\ xz=y^2+2y-x-z\\ yz=x^2+2x-y-z\end{cases}.$

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

<u>Soluție.</u> Relația $xy=z^2+2z+1-1-x-y\Leftrightarrow(x+1)(y+1)=(z+1)^2$ sugerează substituțiile $x+1=a$, $y+1=b$, $z+1=c$ şi sistemul devine: $\begin{cases}ab=c^2\\ ac=b^2\\ bc=a^2\end{cases},a,b,c\in\mathbb{C}$. Considerăm cazurile:

I. $a=0 \Rightarrow b=c=0.$
II. $a\neq 0 \Rightarrow b,c\neq 0.$ În acest caz, sistemul este echivalent cu $a^3=b^3=c^3=abc$.
Observăm că tripletul $(a,a,a), a\in\mathbb{C}^*$ este soluție a sistemului.
Dacă cel puțin două dintre numerele a, b, c sunt distincte, atunci deducem că toate cele trei numere sunt distincte. În acest caz, $\left(\frac{b}{a}\right)^3=\left(\frac{c}{a}\right)^3=1\Rightarrow \frac{b}{a},\frac{c}{a}$ sunt rădăcinile complexe nereale de ordin trei ale unității.
Astfel, $(a,\ b,\ c)=(z_1,\ z_2,\ z_3)$, unde $z_1\neq z_2\neq z_3\neq z_1$ sunt numere complexe în mulţimea $\{t,\omega t,\omega^2 t\}, t\in\mathbb{C}^*$, şi $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Astfel, soluţiile sunt $(x,\ y,\ z)\in\{(z,\ z,\ z),\ (z_1-1,\ z_2-1,\ z_3-1)\}$, $z\in\mathbb{C}$, $z_1,\ z_2,\ z_3$ precizate mai sus.

Barem.

Reduce sistemul la o formă mai simplă ……………………………………………	2p
(z,z,z) este soluție a sistemului…………………………………………………	1p
Determină forma soluțiilor (x,y,z), cu componente distincte……………………………	4p

4. Fie a,b,c trei numere complexe distincte cu proprietatea: $|a|=|b|=|c|=|a+b+c|$. Să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe $a,b,$ respectiv c este dreptunghic.

***

Soluție 1. Fie $a=r(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), b=r(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), c=r(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3), r>0, \varphi_i\in[0,2\pi), i=\overline{1,3}.$

Avem $|a+c+b|=r \Leftrightarrow (\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3)^2+(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\sin\varphi_3)^2=1\Leftrightarrow$

$$3+2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+2\cos(\varphi_2-\varphi_3)+2\cos(\varphi_1-\varphi_3)=1\Leftrightarrow$$

$$1+\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_3)=0\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}\right)=0.$$

Dacă, de exemplu, presupunem $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)=0,$ atunci

$a+b=r(\cos\varphi_1+\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1+i\sin\varphi_2)=2r\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\right)=0.$ Analog, în celelalte cazuri, vom obține $b+c=0$, respectiv $a+c=0$.

Deoarece afixele vârfurilor triunghiului au același modul, centrul cercului circumscris triunghiului coincide cu originea O a sistemului de coordonate. Din relațiile găsite deducem că O coincide cu mijlocul unei laturi, deci triunghiul este dreptunghic.

Soluție 2. Folosim produsul real a două numere complexe $u\bullet v=\frac{1}{2}(\bar{u}v+u\bar{v})$.

$|a|=|b|=|c|=|a+b+c|\Rightarrow |a|^2=|b|^2=|c|^2=|a+b+c|^2\Leftrightarrow a\bullet a=b\bullet b=c\bullet c=(a+b+c)\bullet(a+b+c)$.

Prin efectuarea calculelor se obțin relațiile $(a+b)\bullet(b+c)=0, (a+b)\bullet(a+c)=0, (a+c)\bullet(b+c)=0$. Dacă notăm $a+b+c=h$ afixul ortocentrului H, obținem $(h-a)\bullet(h-b)=0$ și analoagele. Dacă H nu coincide cu niciun vârf al triunghiului, atunci deducem că $AH\perp BH\perp CH\perp AH$, absurd. În concluzie, ortocentrul triunghiului coincide cu unul dintre vârfurile triunghiului și triunghiul este dreptunghic.

Barem.*(pentru soluția 1)*

Scrie numerele sub formă trigonometrică……………………………………………	1p
Deduce $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2}\right)=0.$……………………………......	3p
Deduce că cel puțin unul dintre numerele $a+b, a+c, b+c$ este egal cu 0……………...	2p
Finalizare………………………………………………………………….....	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.