Olimpiada de matematică

etapa locală

16.02.2014

Clasa a XII-a

1. Fie (G,$*$) un grup cu 124 de elemente. Dacă există trei elemente a,b,c, al grupului astfel încât $a^2 = b^2 = c^2 =$ e, e fiind elementul neutru al operaţiei, demonstraţi că grupul nu este comutativ.

Cziprok Andrei, Satu Mare

Barem:

1 p	Presupunem contrariul.
1 p	Atunci H = $\{e, a. b. c. ab,\ \ ac, bc, abc\}$ este un subgroup al lui G
2 p	Verificarea afirmaţiei prin tabla operaţiei în H
2 p	Conform teoremei Lagrange $\|G\| \vdots \|H\|$, adică 124 ⋮ 8 fals
1 p	Conform principiului reducerii la absurd (G,$*$) nu este comutativ.
7 p	**TOTAL**

2. Pe R se defineşte legea „$*$” dată prin $x * y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1}}$, $n \in N^*$, $\forall\ x, y\ \in R$.

a) Arătaţi că $(R, *)$ este grup comutativ izomorf cu grupul $(R, +)$.

b) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * y * (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$

Muntean Doina, Satu Mare

Barem:

2 p	**a)** (R, *) - grup comutativ
1 p	$x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$, f : R → R; f (x) = x^{2n+1}
1 p	f – bijectivă (1)
1 p	$f(x * y) = f(x) + f(y)$ (2) Din (1) şi (2) ⇒ (R, *) ≅ (R, +)
2 p	**b)** x = 2; y = 1
7 p	**TOTAL**

3. Să se calculeze integralele nedefinite:

a) $\int \frac{2x^4+1}{x(x^4+1)(x^8+x^4+1)}dx, \quad x\in(0,\infty)$

b) $\int \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{e^x+\cos x}dx, \quad x\in(0,\infty)$

Traian Tămâian, Carei

Barem:

1 p	a) $I=\int \frac{x^3(2x^4+1)}{x^4(x^4+1)(x^8+x^4+1)}dx=\frac{1}{4}\int \frac{8x^7+4x^3}{(x^8+x^4)(x^8+x^4+1)}dx$
1 p	Cu schimbarea de variabilă $x^8+x^4=t,\ (8x^7+4x^3)dx=dt,$ 3ntegral se scrie
2 p	$I=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\frac{1}{4}\int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\frac{1}{4}[\ln t-\ln(t+1)]+C$
1 p	Rezultă $I=\frac{1}{4}[\ln(x^8+x^4)-\ln(x^8+x^4+1)]+C$
1 p	b) $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{e^x+\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{(e^x+\cos x)-(e^x+\cos x)'}{e^x+\cos x}dx=$
1 p	$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int [1-\frac{(e^x+\cos x)'}{e^x+\cos x}]dx=\frac{\sqrt{2}}{2}[\int dx-\int \frac{(e^x+\cos x)'}{e^x+\cos x}dx]=\frac{\sqrt{2}}{2}[x-\ln(e^x+\cos x)]+C, \quad C\in R.$
7 p	**TOTAL**

4. Fie şirul cu termenul general $I_n = \int_0^1 e^{nx}(x^2+1)^{n-1}(x+1)^2\,dx, \quad n \in N^*.$

a) Demonstraţi că există $k \in R$ astfel încât $[e^x(x^2+1)]' = e^x(x+k)^2,\ \forall x \in R$

b) Să se calculeze $I_n,\ n \in N^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n(2e)^n(2e - \sqrt[n]{nI_n})$.

Traian Tămâian, Carei

Barem:

2 p	a) Deoarece $[e^x(x^2+1)]' = e^x(x+1)^2$, rezultă că există $k = 1 \in R$ astfel încât $[e^x(x^2+1)]' = e^x(x+k)^2,\ \forall x \in R.$
1 p	b) Cum $[e^x(x^2+1)]' = e^x(x+1)^2$, integrala se scrie $I_n = \int_0^1 [e^x(x^2+1)]^{n-1} e^x(x+1)^2\,dx =$
1 p	$= \int_0^1 [e^x(x^2+1)]^{n-1}[e^x(x^2+1)]'\,dx = \left.\dfrac{[e^x(x^2+1)]^n}{n}\right\|_0^1 = \dfrac{(2e)^n - 1}{n}.$
1 p	Cu acestea limita cerută se scrie $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(2e)^n(2e - \sqrt[n]{(2e)^n - 1}) = 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n(2e)^n\left(1 - \sqrt[n]{1 - \dfrac{1}{(2e)^n}}\right)$ sau $L = 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sqrt[n]{1 - \dfrac{1}{(2e)^n}} - 1}{-\dfrac{1}{(2e)^n}}\right) \quad (*)$
1 p	Considerând şirul $x_n = -\dfrac{1}{(2e)^n},\ n \geq 1,$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ din $(*)$ rezultă $L = 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sqrt[n]{1+x_n} - 1}{x_n}\right) = 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{(1+x_n)^{\frac{1}{n}} - 1}{x_n}\right) = 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x_n)}{n}} - 1}{x_n}\right) =$
1 p	$= 2e \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x_n)}{n}} - 1}{\dfrac{\ln(1+x_n)}{n}}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 2e \cdot 1 \cdot 1 = 2e.$
7 p	**TOTAL**