

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a XI-a

- În reperul cartezian xOy considerăm triunghiul echilateral ABC . Arătați că cel puțin una dintre coordonatele punctelor A, B sau C este număr irațional.
- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $\det(A) = 0$. Notăm cu $tr(A) = a + d$ urma matricei A .
 - Arătați că dacă $tr(A) < 0$ ecuația $X^{2020} = A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Arătați că dacă $tr(A) > 0$ ecuația $X^{2020} = A$ are exact două soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Arătați că ecuația $X^{2020} = A$ are o infinitate de soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă și numai dacă $A = \mathbf{O}_2$.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0, 1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru orice $n \geq 1$.
 - Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
 - Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- Se consideră numerele naturale nenule p și q și numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$. Știind că

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_q^n,$$

pentru o infinitate de numere naturale n , arătați că

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_p^x = b_1^x + b_2^x + \dots + b_q^x,$$

pentru orice număr real x .

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.