



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_3) = \det(A + 2I_3)$. Să se demonstreze că

$$2 \det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 3 \det(A).$$

PROBLEMA 2. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix},$$

unde cu a, b, c se notează lungimile laturilor unui triunghi, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului. Să se arate că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n^2 + 5n + 9} \}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

PROBLEMA 4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = 3$ și $x_n = x_{n-1} + 2n + 1$, pentru $n \geq 2$.

a) Să se determine termenul general al șirului;

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right)$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.