



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014**

CLASA a IX-a

SUBIECTUL I (7p)

Să se determine funcția $f: N^* \rightarrow N^*$ știind că $1^2 f(1) + 2^2 f(2) + \dots + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n) + 1)^2}{4}$

oricare ar fi numărul natural nenul n .

Aurel Doboșan, GM 11/2013

SUBIECTUL II (7p)

Fie ecuația $p + [x] = [px]$, unde p este un număr natural.

a) Determinați numerele naturale p pentru care ecuația are soluții naturale.

b) Rezolavați ecuația pentru $p = 2$.

SUBIECTUL III (7p)

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $abc = 1$. Să se demonstreze că

$$2(a^5 + b^5 + c^5) \geq \frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{b^3 + c^3}{a} + \frac{c^3 + a^3}{b} \geq \frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2}.$$

Diana Drăjneanu, RMI 4/2013

SUBIECTUL IV (7p)

Pe laturile paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$,

$Q \in (DA)$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor $QAM, MBN,$

NCP , respectiv PDQ . Să se arate că:

$G_1 G_2 G_3 G_4$ este paralelogram.

Paralelogramele $ABCD$ și $G_1 G_2 G_3 G_4$ au laturile paralele dacă și numai dacă $MP \parallel BC$ și $NQ \parallel AB$.

Nicolae Papacu, RMI 4/2013

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a X-a

SUBIECTUL I (7p)

Demonstrați inegalitatea: $\frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{(yz)^2}+1} + \frac{(y+1)^2}{\sqrt[3]{(zx)^2}+1} + \frac{(z+1)^2}{\sqrt[3]{(xy)^2}+1} \geq 3$, unde $x, y, z > 0$. În ce caz avem egalitate?

Lucian Tuțescu, Dană Camelia, RMI 4/2013

SUBIECTUL II (7p)

Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

Bogdan Vasluianu, RMI 4/2013

SUBIECTUL III (7p)

a) Ordonăți crescător numerele $\sqrt[3]{26}$, $\log_2 9$, $\sqrt[3]{16}-1$, $\log_3 82$.

b) Rezolvați ecuația $(\sqrt[3]{16}-1)^x + (\sqrt[3]{26})^x + (\log_2 9)^x + (\log_3 82)^x = 2^{\sqrt{4-x}}$

Ionel Tudor, RMI 4/2013

SUBIECTUL IV (7p)

Fie a, b, c numere complexe distincte și de același modul. Să se arate că punctele de afixe a, b, c sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 0$

Marian Cucoaneș, GM 11/2013

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a XI-a

SUBIECTUL I (7p)

Să se determine matricele $A \in M_3(R)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ pentru care există $n \in N^*$ astfel încât

$$A^n = I_3.$$

Bogdan Vasluianu, RMI 4/2013

SUBIECTUL II (7p)

a) Să se găsească două matrice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că orice două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ nu comută}$$

V. Cerbu, M. Piticari, GM, 12/2013

SUBIECTUL III (7p)

Fie $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ trei șiruri de numere reale cu proprietatea că pentru orice număr natural

n are loc relația $a_n + b_n + c_n = 1$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) = \frac{1}{3}$, să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Octav Drăgoi, RMI, 1/2011

SUBIECTUL IV (7p)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația $x_{n+1} = 2x_n^2 - 11x_n + 18$, $\forall n \geq 0$, $x_0 \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$. Să se demonstreze că

șirul este convergent și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - l)$, unde $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Nicolae Papacu, RMI, 3/2012

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014**

CLASA a XII-a

SUBIECTUL I (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 4^{6^n} + 7$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Să se arate că în Z_{11} , avem $\hat{a}_n = \hat{0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Să se arate că în Z_5 , este adevărată afirmația: există $\hat{b} \in Z_5$ astfel încât $\hat{a}_n \cdot \hat{b} = \hat{1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nicolae Florescu, RMI, 3/2012

SUBIECTUL II (7p)

Fie $(G, \cdot)$ un grup, e elementul său neutru, $p \geq 1$ un număr natural și elementele distincte

$a, b \in G - \{e\}$ satisfac condițiile: $b^{3p} = e$ și $ab = b^{2p}a$. Arătați că

1. $b^3 = e$
2. $ab = ba$ dacă și numai dacă $3 \mid (p-2)$

Nicolae Papacu, RMI, 3/2012

SUBIECTUL III (7p)

Fie $p \geq 2$ un număr natural și șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\sqrt[p]{x^p} \sqrt[p]{x^p} \cdots \sqrt[p]{x^p}}_{n \text{ radicali}}} dx$.

- a) Calculați I_1
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Nicolae Papacu, RMI, 2/2012

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu derivata de ordinul doi continuă, având

$$f(0) = f(1). \text{ Să se arate că } \int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 120 \left(\int_0^1 x f'(x) dx \right)^2.$$

Radu Pop, GM, 11/2013

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore