



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală -17.02.2018
Clasa a XII-a Matematică-Informatică

1. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ 5b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 15b^2 = 1 \right\}$.

a) Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G .

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că mulțimea G este infinită.

2. Pe mulțimea $M = (0, \infty)$ se definește legea de compoziție „ $*$ ”, care satisface următoarele proprietăți :

i) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z), \forall x, y, z \in M$.

ii) $x * 1 = x, \forall x \in M$.

Să se calculeze :

a) $16 * \frac{1}{4}$

b) $\sqrt{2018} * 2018$.

3. Fie integralele : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$ și $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$.

a) Calculați $2J - 3I$

b) Calculați I și J .

4. Fie constantele $a, b \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x^3} e^{\frac{x-1}{x}}, F(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) e^{\frac{x-1}{x}}$.

Determinați constantele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât F să fie o primitivă a funcției f pe $(0, \infty)$.

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.