

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a XI-a

1. Fie $H \subset S_n, H \neq \emptyset$, unde S_n este mulțimea permutărilor de ordinul n , iar H are proprietatea: $\forall \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. Arătați că:

(4p) a) $e \in H$, unde e este permutarea identică.

(3p) b) $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului.

(5p) a) Arătați că $\det A \geq 0$.

(2p) b) În ce condiții avem $\det A = 0$?

GM 12/2014

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_0 > 0$ și $x_{n+1} = 1 + 3x_n + x_n^2$, pentru orice n număr natural.

(3p) a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton și nemărginit.

(4p) b) Calculați limitele următoarelor șiruri: $\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Petru Vlad

4. Fie funcțiile $f_p : (-\infty, -p] \cup [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_p(x) = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x} + \dots + \sqrt{x^2 + px}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.

(3p) a) Determinați ecuațiile asimptotelor funcției f_2 .

(4p) b) Demonstrați că $\lim_{x \searrow 0} \frac{f_p^2(x)}{x}$ există și are loc inegalitatea $\lim_{x \searrow 0} \frac{f_p^2(x)}{x} \leq \frac{p^2(p+1)}{2}$.

Liana Agnola

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.