

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. Fie șirul $(d_n)_{n \geq 1}$ definit descriptiv, astfel:

$$d_1 = 0,1; d_2 = 0,11; d_3 = 0,111; \dots; d_n = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ ori}}.$$

a) Să se găsească primele 2016 zecimale ale numărului $\sqrt{d_{4032}}$.

b) Să se găsească suma: $\sum_{k=1}^n 10^k \cdot d_k$.

2. Fie numerele $x, a, b \in (0; +\infty)$ astfel încât $a + b = 2$. Demonstrați că:

$$\sqrt{x + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{x + \frac{1}{b^2}} \geq 2\sqrt{x+1}.$$

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul lui AB , N mijlocul lui BC , E punctul de intersecție a dreptelor AN și BD , iar F punctul de intersecție a dreptelor DM și AC . Arătați că dacă $BE = \frac{1}{3}BD$ și $AF = \frac{1}{3}AC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

4. Se consideră hexagonul convex $ABCDEF$ și se notează cu $G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F$ centrele de greutate pentru pentagoanele $BCDEF, ACDEF, ABDEF, ABCEF, ABCDF, ABCDE$.

a) Să se demonstreze că se poate construi un hexagon cu vectorii:

$$\overrightarrow{AG_A}, \overrightarrow{BG_B}, \overrightarrow{CG_C}, \overrightarrow{DG_D}, \overrightarrow{EG_E}, \overrightarrow{FG_F}.$$

b) Să se determine raportul ariilor hexagoanelor $G_A G_B G_C G_D G_E G_F$ și $ABCDEF$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru: 3 ore