

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a XI-a

1. Pentru orice numere reale a, b, c se consideră determinantul

$$D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

- (a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(x, 1, -2) = 0$.
(b) Arătați că, dacă $a, b, c > 0$ și $ab + bc + ca \leq 3abc$, atunci $D(a, b, c) \geq 27$.

2. (a) Se consideră matricele $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \frac{\sin t}{2} \\ -2\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$H = \{A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Arătați că:

- (i) dacă $A(t), A(u) \in H$, atunci $A(t) \cdot A(u) \in H$
(ii) există un număr întreg k astfel încât $A^{2018}\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \cdot I_2$.

- (b) Demonstrați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ care verifică simultan următoarele trei proprietăți: $X^2 \neq I_2, X^2 \neq -I_2$ și $X^4 = I_2$.

Gazeta Matematică 10/2017

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n}{nx}$.

$$\text{Calculați } L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi}{n}, L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot a_n \text{ și } L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{2 \cdot a_n}.$$

4. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ este convergent și determinați limita sa.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte