

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a IX -a

SUBIECTE :

1.

a) Demonstrați că : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică de rație $q \neq 1$. Calculați suma:

$$T_n = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + nb_n \text{ în funcție de } b_1 \text{ și } q.$$

2. În patrulaterul ABCD, O_1 este mijlocul diagonalei AC și O_2 este mijlocul diagonalei BD.

a) Să se arate că $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$.

b) Să se arate că dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, atunci ABCD este paralelogram.

3. Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. Rezolvați ecuația $2 \cdot [x] \cdot (1 + \{x\}) = 2x + 1$, unde $[a]$ -partea întreagă a lui a și $\{a\}$ -partea fracționară a lui a .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 0 -7 puncte
Timpul de lucru : 3 ore