

Olimpiada de matematică
faza locală
 21 februarie 2016
 Soluții și bareme
Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(AA^t) = 0$.
 b) Fie $B \in M_{3,2}(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(BB^t) = 0$.
 c) Fie $C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(C - C^t) = 0$.
Soluție. a) În matricea AA^t , oricare 2 linii sunt proporționale 2p
 b) Dacă

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

atunci $B \cdot B^t = \overline{B} \cdot \overline{B}^t$, unde

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\det(BB^t) = \det(\overline{B}) \det(\overline{B}^t) = 0$ 2p

c) Determinantul oricărei matrice este egal cu determinantul transpusei, deci

$$\det(C - C^t) = \det((C - C^t)^t) = \det(C^t - C) = \det(-(C - C^t)) = -\det(C - C^t),$$

de unde concluzia. 3p

2. Se consideră șirul definit astfel: $x_1 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n},$$

pentru orice n .

- a) Aflați limita șirului.
 b) Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Soluție. a) Șirul este strict crescător 1p
 Dacă ar fi mărginit, ar converge către un număr real L , și am obține prin trecere la limită $L = L + \frac{1}{2L}$, absurd,
 deci limita este ∞ 3p
 b) Calculăm, cu Stolz Cesaro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(x_n + \frac{1}{2x_n} \right)^2 - x_n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x_n^2} \right) = 1,$$

deci limita cerută este 1 3p

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $2A + 3B = 6AB$. Arătați că $AB = BA$.

Soluție. Egalitatea dată este echivalentă cu

$$I_n - 2A - 3B + 6AB = I_n$$

sau

$$(I_n - 2A)(I_n - 3B) = I_n$$

..... 3p

Deducem că matricele $I_n - 2A$ și $I_n - 3B$ sunt inverse una celeilalte, deci avem și

$$(I_n - 3B)(I_n - 2A) = I_n,$$

..... 3p

de unde obținem $2A + 3B = 6BA$, deci și concluzia 1p

4. Arătați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty.$$

Soluție. Fie

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Șirul este strict crescător. Dacă nu ar avea limita ∞ , ar fi convergent. Fie în acest caz H limita sa 2p
Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_{2n} - h_n) = H - H = 0.$$

..... 2p
dar

$$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicție.....3p