

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XII-a

SUBIECTE:

1. Să se calculeze $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015} dx, x > 0.$

2. Fie $(G, \bullet)$ un grup cu elementul neutru e și H un subgrup propriu al lui G .

i) Dacă $a \in G \setminus H$, notăm $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Demonstrați că $H \cap aH = \emptyset$.

ii) Dacă G este comutativ și $a \in G \setminus H$ satisface $a^2 = e$, atunci $K = H \cup aH$ este subgrup al lui G .

G.M. 1986

3. a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{4^x + 1}{3^x + 2^x} dx$

b) Se consideră numerele reale a și b și funcția continuă $f: R \rightarrow R$ cu proprietatea că

$$\int_{at}^{bt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx, \text{ oricare ar fi } t \in (0, 2). \text{ Să se arate că } af(a) = bf(b).$$

GM 10/2014

4. Fie $(A, +, \bullet)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x, (\forall) x \in A$. Să se arate că :

a) $x + x = 0, (\forall) x \in A$ și că A este inel comutativ;

b) dacă inelul nu are divizori ai lui zero, atunci el are cel mult două elemente.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.