



MINISTERUL EDUCAȚIEI



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN PRAHOVA



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE

## ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

EDIȚIA A XX-A, 7 – 11 Iunie 2023, VĂLENII DE Munte,  
PRAHOVA

### Analiza Datelor S1

#### Subiectul 1 (9p)

Când o cometă se apropie de Soare, activitatea sa crește prin sublimarea materialelor înghețate din nucleul său, formând o coamă strălucitoare formată din gaz și praf. Datorită prafului cometar, care împrăștie lumina provenită de la Soare, cometele încep să fie vizibile de pe Pământ când acestea se află la aproximativ 3 – 4 UA față de Soare. Așa s-a întâmplat și în cazul primei comete interstelare care a fost descoperită de astronomi în anul 2019. În tabelul de mai jos se găsesc date astronomice achiziționate de către o cameră CCD prin intermediul filtrului r.

| MJD      | Data   | r (UA) | $\Delta$ (UA) | $\log \phi(\alpha)$ | $f_r$ | $z_{pr}$ | X     |
|----------|--------|--------|---------------|---------------------|-------|----------|-------|
| 58759.23 | Oct 3  | 2.485  | 2.974         | -0.296              | 16325 | 27.75    | 1.765 |
| 58760.23 | Oct 4  | 2.473  | 2.953         | -0.299              | 7480  | 26.82    | 1.730 |
| 58761.24 | Oct 5  | 2.460  | 2.932         | -0.302              | 19225 | 27.75    | 1.690 |
| 58763.23 | Oct 7  | 2.435  | 2.891         | -0.308              | 18379 | 27.56    | 1.632 |
| 58768.23 | Oct 12 | 2.374  | 2.790         | -0.324              | 20911 | 27.51    | 1.512 |

Pentru cele cinci nopți de observații se dau:

1. MJD – Data Juliană Modificată
2. r – distanța heliocentrică în UA
3.  $\Delta$  – distanța geocentrică în UA
4.  $\log \phi(\alpha)$  – logaritmul funcției de fază
5.  $f_r$  – fluxul total în banda r în fotoelectroni
6.  $z_p$  – magnitudinea zeropoint de referință pentru banda r corespunzătoare unui singur fotoelectron
7. X – masa de aer

- a) (1p) Plecând de la legea de absorbție pentru extincția atmosferică,  $\frac{I}{I_0} = e^{-kX}$ , deduceți următoarea formula de calcul pentru magnitudinea aparentă:

$$m = -2.5 \log f + zp + 2.5cX$$

- b) (1p) Calculați magnitudinile aparente în  $r$ , știind valoarea coeficientului de absorbție,  $c_r = 4\%$

Secțiunea eficace de împrăștiere a unei comete,  $S_{ef}$ , este o măsură a ariei efective a cometei care este iluminată de Soare. Această zonă este de obicei mai mare decât secțiunea fizică a nucleului cometei, deoarece include și coama și coada. Se poate demonstra că

$$S_{ef} = \frac{\pi r_{\oplus}^2}{A} 10^{-0.4(M-m_{\odot})}$$

unde  $r_{\oplus}$  este distanța Pământ – Soare, 1 UA;  $A$  este albedoul geometric;  $m_{\odot}$  este magnitudinea aparentă a Soarelui; iar  $M$  este magnitudinea absolută a cometei care se calculează atunci când cometa se află în același timp la 1 UA față de Soare și la 1 UA față de Pământ, iar unghiul de fază este 0 grade:

$$M = m - 5 \log r / r_{\oplus} - 5 \log \Delta / r_{\oplus} + 2.5 \log \phi(\alpha)$$

- c) (2p) Calculați magnitudinile absolute și secțiunile eficace de împrăștiere în banda  $r$  știind că  $A_r = 0.1$  și  $m_{\odot,r} = -26.93$ .  
d) (4p) Reprezentați grafic secțiunile eficace de împrăștiere în funcție de timp și fițați liniar datele pentru a estima  $\Delta S_{ef} / \Delta t$  în  $\text{km}^2/\text{zi}$ .  
e) (1p) Estimați prin extrapolare momentul în care coama cometei începe să se formeze, atunci când  $S_{ef} \approx 0$ .

## Barem

- a) *Erată: Deoarece s-a realizat o confuzie în notația din enunț elevii pot urma două variante de rezolvare care vor fi considerate ambele corecte. Le vom prezenta separat în barem.*

### Varianta 1.

Folosind legea Pogson și legea de absorbție pentru extincția atmosferică, obținem:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kX} = 10^{-0.4(m-m_0)} \Leftrightarrow m = m_0 + 2.5cX$$

$$c = \lg(e)k$$

**0.4 p**

Apoi, raportul dintre fluxul dat de un singur fotoelectron și fluxul total al cometei va fi

$$\frac{f}{1 \text{ fotoelectron}} = 10^{-0.4(m_0-zp)}$$

**0.4 p**

$$m_0 = zp - 2.5 \log f$$

$$m = -2.5 \log f + zp + 2.5cX$$

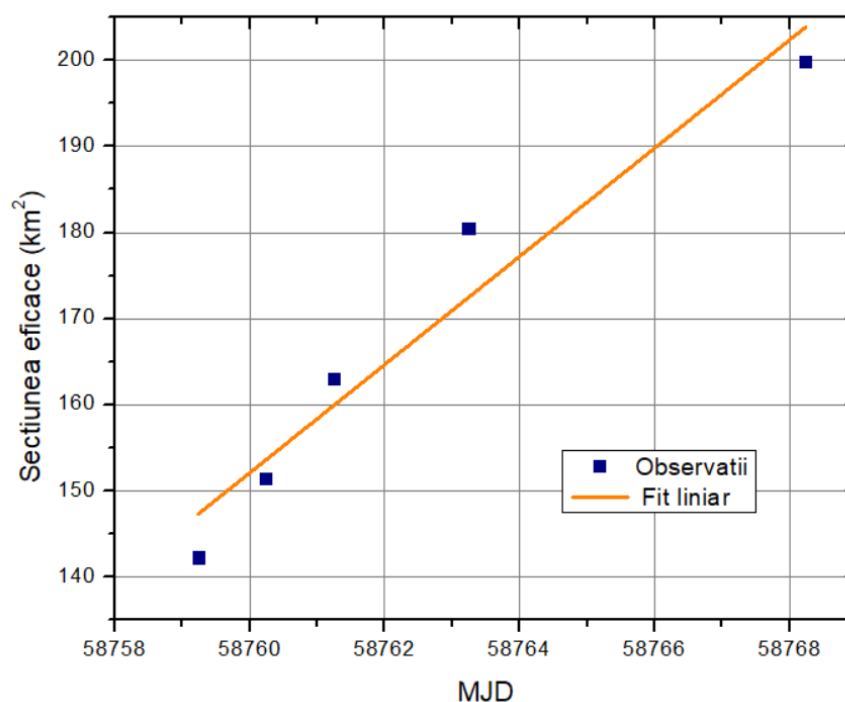
**0.2 p**

b) **0.2p pentru fiecare valoare calculată 0.2p x 5=1p**

c) **0.2p pentru fiecare valoare calculată 0.2p x 10=2p**

| MJD      | $r$ (mag) | $M$ (mag) | $S_{ef}$ (km <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------|-----------|-----------------------------|
| 58759.23 | 17.39     | 12.31     | 142.2                       |
| 58760.23 | 17.30     | 12.24     | 151.4                       |
| 58761.24 | 17.20     | 12.16     | 163.0                       |
| 58763.23 | 17.06     | 12.05     | 180.4                       |
| 58768.23 | 16.86     | 11.94     | 199.8                       |

d)



Punctele sunt corect ilustrate pe grafic

**1.0p**

Mărimile fizice și unitățile de măsură sunt trecute pe axe

**0.2p**

Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite

**0.2p**

Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite

**0.1p**

Din fit:  $\Delta S_{ef} / \Delta t = 6.3 \pm 1.0$  km<sup>2</sup>/zi

**2.5p**

Rezultatul trebuie să fie obținut prin metoda celor mai mici pătrate pentru a obține cel mai bun fit. Rezultatele obținute prin alte metode obțin **2p** dacă se încadrează în intervalul obținut mai sus. Se acordă **1p** pentru intervalul de  $6.3 \pm 1.5$  km<sup>2</sup>/zi

e) La 3 Octombrie avem din fit următoarea valoare:  $S_{ef, 3 \text{ Oct}} = 147.6$  km<sup>2</sup>

**0.2p**

$\Delta t = \frac{147.6 - 0}{6.3} = 23.4$  zile, deci **9 septembrie**

**0.8p**

Se acordă **punctaj maxim** pentru orice rezultat din perioada **4 – 15 septembrie**.

## Varianta 2

Folosind legea Pogson și legea de absorbție pentru extincția atmosferică, obținem:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-cX} = 10^{-0.4(m-m_0)} \Leftrightarrow m = m_0 + 2.5 \lg(e) cX$$

**0.4 p**

Apoi, raportul dintre fluxul dat de un singur fotoelectron și fluxul total al cometei va fi

$$\frac{f}{1 \text{ fotoelectron}} = 10^{-0.4(m_0-zp)}$$

**0.4 p**

$$m_0 = zp - 2.5 \lg(f)$$

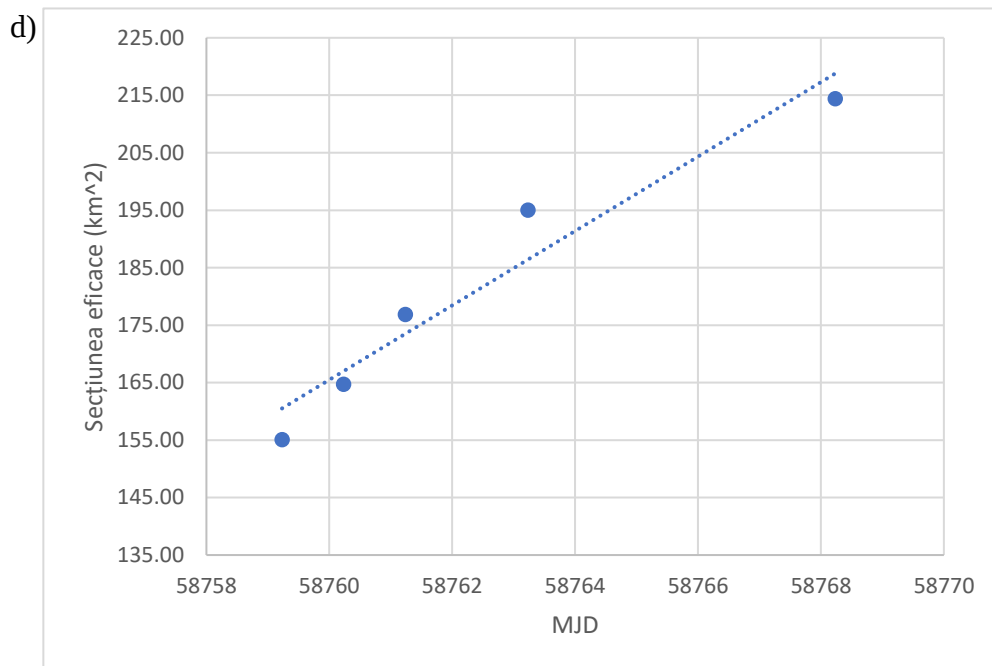
$$m = -2.5 \lg(f) + zp + 2.5 \lg(e) cX$$

**0.2 p**

b) **0.2p pentru fiecare valoare calculată 0.2p x 5=1p**

c) **0.2p pentru fiecare valoare calculată 0.2p x 10=2p**

| MJD      | $r$ (mag) | M (mag) | $S_{ef}$ (km <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------|---------|-----------------------------|
| 58759.23 | 17.29     | 12.21   | 155.0                       |
| 58760.23 | 17.21     | 12.15   | 164.7                       |
| 58761.24 | 17.11     | 12.07   | 176.9                       |
| 58763.23 | 16.97     | 11.96   | 195.0                       |
| 58768.23 | 16.77     | 11.86   | 214.4                       |



Punctele sunt corect ilustrate pe grafic

**1.0p**

Mărimile fizice și unitățile de măsură sunt trecute pe axe

**0.2p**

Valorile numerice pe cele două axe sunt uniform distribuite

**0.2p**

Așezarea în pagină și spațierea sunt potrivite

**0.1p**

Din fit:  $\Delta S_{ef}/\Delta t = 6.5 \pm 1.0 \text{ km}^2/\text{zi}$

**2.5p**

Rezultatul trebuie să fie obținut prin metoda celor mai mici pătrate pentru a obține cel mai bun fit. Rezultatele obținute prin alte metode obțin **2p** dacă se încadrează în intervalul obținut mai sus. Se acordă **1p** pentru intervalul de  $6.5 \pm 1.5 \text{ km}^2/\text{zi}$

e) La 3 Octombrie avem din fit următoarea valoare:  $S_{ef,3Oct} = 158.4 \text{ km}^2$

**0.2p**

$\Delta t = \frac{158.4 - 0}{6.5} = 24.3 \text{ zile, deci 8 septembrie}$

**0.8p**

Se acordă **punctaj maxim** pentru orice rezultat din perioada **3 – 14 septembrie**.

## Subiectul 2 (8p)

### Zgomotul Magnetic în Detectorul Virgo

Înainte de începerea observațiilor cu detectorul de unde gravitaționale Virgo, există o perioadă de analiză a zgomotului din mediul ambiant (în limba engleză – environmental noise hunting). Una dintre sursele de zgomot de interes este câmpul magnetic prezent în brațele detectorului și în clădirile unde se găsesc oglinzile (clădirea centrală – în engleză Central Building, prescurtat CEB, și cele două clădiri terminale în nord și în vest – North End Building prescurtat NEB și West End Building prescurtat WEB). Este necesară înțelegerea

răspunsului detectorului la variații ale câmpului magnetic pentru a nu interpreta o schimbare a câmpului magnetic înconjurător ca fiind o eventuală detecție.

În fiecare dintre cele trei clădiri există câte o bobină capabilă să creeze câmpuri magnetice de intensități diferite, în funcție de curentul trimis prin aceasta. Această operațiune poartă numele de injecție de zgomot magnetic.

Un răspuns cantitativ la întrebarea “Dacă injectăm un câmp magnetic  $X$ , ce schimbări observăm în lungimile brațelor detectorului măsurate de raza laser?” este dat de funcția de transfer, pentru care formula este:

$$TF(f) = \sqrt{\frac{Y_{inj}^2(f) - Y_{bkg}^2(f)}{X_{inj}^2(f) - X_{bkg}^2(f)}}$$

unde  $f$  este frecvența exprimată în Hz,  $Y_{inj}$  (*inj* – injecție) este diferența dintre lungimile brațelor măsurate de raza laser în timpul injecției magnetice, în metri (m),  $Y_{bkg}$  (*bkg* – background) este diferența dintre lungimile brațelor măsurate de raza laser în mod obișnuit (fără stimuli exteriori), în metri (m),  $X_{inj}$  este intensitatea câmpului magnetic măsurată de un magnetometru din interiorul clădirii în timpul injecției, în nanoTesla (nT), iar  $X_{bkg}$  este intensitatea câmpului magnetic măsurată de un magnetometru în condiții normale în interiorul clădirii (fără stimuli exteriori), în nanoTesla (nT). Unitățile de măsură utilizate în general pentru TF sunt m/T.

Pentru a ne asigura că valorile observate pentru  $X$  și  $Y$  se datorează într-adevăr câmpului magnetic și nu altor efecte (zgomot termic, rezonanțe, etc.), se verifică următoarele condiții:

$\frac{X_{inj}}{X_{bkg}} > 10$  (criteriu ca injecția să fie bine observată în magnetometre) și  $\frac{Y_{inj}}{Y_{bkg}} > 2$  (criteriu ca injecția să fie vizibilă în detector). În cazul în care doar prima condiție este îndeplinită (injecția este bine observată în magnetometre, dar nu și în detector), se poate calcula o limită superioară a funcției de transfer, folosind formula:

$$TF_{LS}(f) = \frac{Y_{bkg}(f)}{\sqrt{X_{inj}^2(f) - X_{bkg}^2(f)}}$$

O analiză a variației funcției de transfer cu frecvența se realizează prin schimbarea potențialului bobinei după formula:

$$V = V_0 \sin(2 \times \pi \times f \times t)$$

unde  $t$  este timpul.

Se execută 20 de astfel de injecții în NEB, cu frecvențe cuprinse între 10 Hz și 1000 Hz, separate egal între ele pe scară **logaritmă**. Datele sunt trecute în tabelul de mai jos.

- (0.5p) Care sunt valorile celor cinci frecvențe lipsă din tabel?
- (1p) Calculați valorile  $\frac{X_{inj}}{X_{bkg}}$  și  $\frac{Y_{inj}}{Y_{bkg}}$  pentru toate frecvențele și completați tabelul. Ce observație se poate face pe baza acestor valori?
- (2p) Completați tabelul cu valorile corespunzătoare ale funcției de transfer (unde se poate calcula) sau a limitei superioare a funcției de transfer doar acolo unde condițiile pentru o valoare măsurată nu sunt îndeplinite. Pentru ajutor, ordinul de mărime a fost deja trecut în tabel.
- (2p) Pe foaia cu scară logaritmică oferită împreună cu subiectele, marcați punctele corespunzătoare valorilor măsurate ale funcției de transfer prin cercuri, iar valorile corespunzătoare limitei superioare prin ×. La acest subpunct nu este nevoie să conectați punctele între ele.
- (2.5p) Presupunând că în punctele pentru care funcția de transfer poate fi calculată graficul trasat poate fi aproximat printr-o dreaptă, care este relația dintre funcția de transfer și frecvența pe această porțiune? Determinați funcția TF(f) de cel mai bun fit care exprimă această relație.

## Barem

- Se caută 20 de linii separate egal între ele pe scară logaritmică. La 10 Hz va fi prima linie, la 1000 Hz va fi linia 20. Între cele 20 de linii sunt 19 segmente egale. Logaritmul primei linii are valoarea:

$$\log_{10} 10 = 1$$

Logaritmul ultimei linii va avea valoarea:

$$\log_{10} 1000 = 3$$

Calculând diferența dintre logaritmi și împărțind la numărul de segmente egale necesare, avem:

$$\frac{\log_{10} 1000 - \log_{10} 10}{19} = \frac{3 - 1}{19} = \frac{2}{19} = 0,105$$

Tabelul a fost de asemenea completat cu valorile lipsă. (0.5p)

- Vezi tabel pentru valori. (0.5p) Observație: detecția este extrem de bine observată în magnetometre (valori chiar și cu trei ordine de mărime mai mari decât criteriul folosit), pe când în detectorul de unde gravitaționale unele linii sunt vizibile, unele nu. (0.5p)
- Vezi tabel pentru valori. (2p=40\*0.05p)
- Vezi grafic. (2p=20\*0.1p)
- Graficul printre punctele cu valori măsurate este bine aproximat printr-o linie dreaptă.

$$\log_{10} TF(f) = \log_{10} A - \alpha \log_{10} f$$

$$TF(f) = A * f^{-\alpha} \quad (0.5p)$$

Coeficientul  $-\alpha$  este panta acestei drepte.

Folosind metoda celor mai mici patrate pe porțiunea specificată obținem

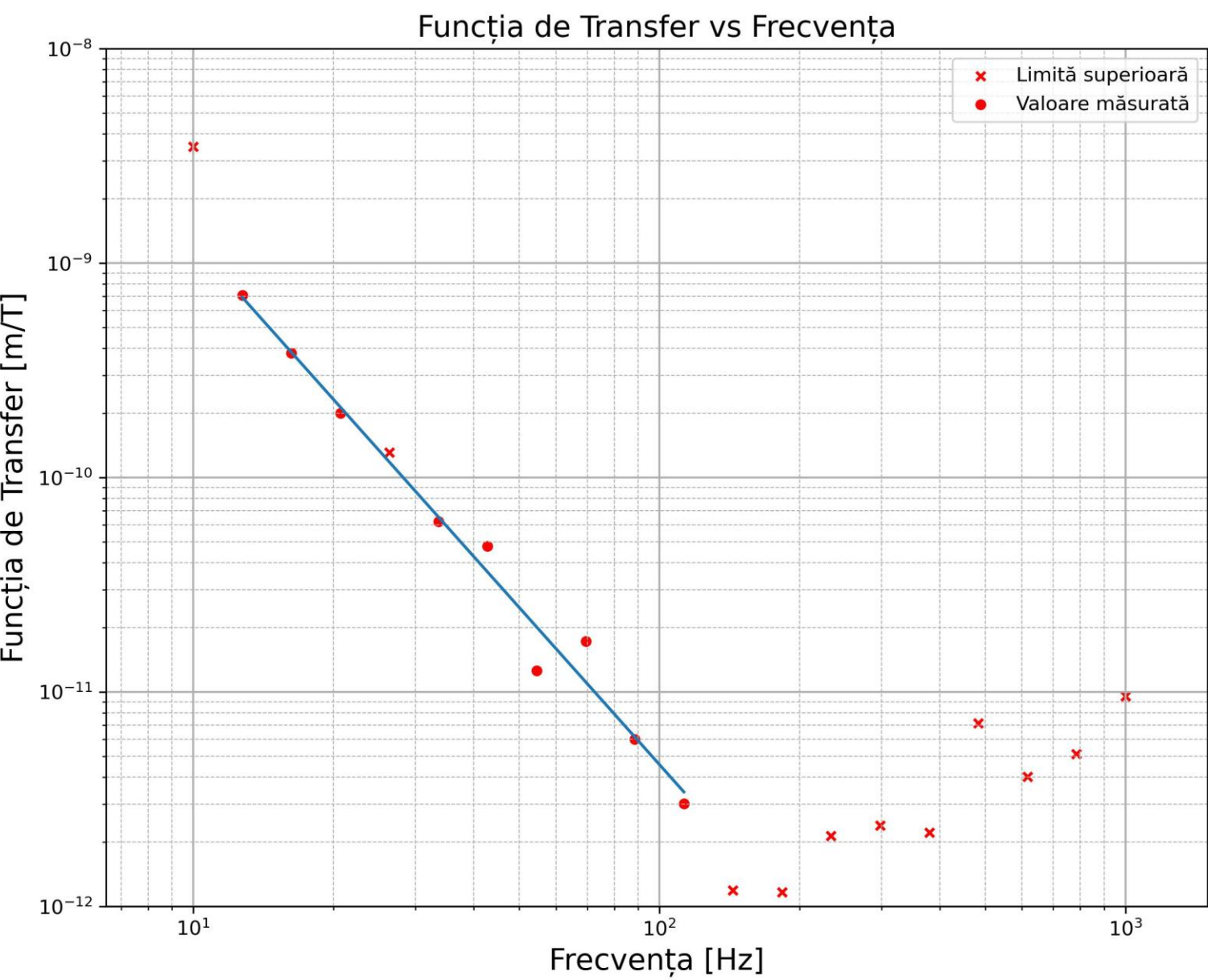
$$\alpha = 2.43 \pm 0.12 \quad (1p)$$

$$\log_{10} A = 4.5 \pm 0.2 \quad (1p)$$

$$A \in (2 * 10^{-7}, 5 * 10^{-7}) \left( \frac{m}{T} \right)$$

În cazul în care nu se folosește metoda celor mai mici patrate se acorda maximum 0.75p pentru valorile lui  $\alpha$  și  $A$  în cazul în care rezultatul se încadrează în intervalul de mai sus.

| $f(Hz)$       | $X_{inj} (nT)$ | $X_{bkg} (nT)$ | $Y_{inj}$<br>$(10^{-18}m)$ | $Y_{bkg}$<br>$(10^{-18}m)$ | $\frac{X_{inj}}{X_{bkg}}$ | $\frac{Y_{inj}}{Y_{bkg}}$ | $TF(f)$<br>$(10^{-11}\frac{m}{T})$ | $TF_{LS}(f)$<br>$(10^{-11}\frac{m}{T})$ |
|---------------|----------------|----------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| 10,00         | 363,40         | 0,02           | 1278,46                    | 1266,61                    | <b>18170</b>              | <b>1,01</b>               | -                                  | <b>348,54</b>                           |
| 12,74         | 431,91         | 0,04           | 322,67                     | 104,27                     | <b>10797</b>              | <b>3,09</b>               | <b>70,70</b>                       | -                                       |
| 16,24         | 451,09         | 0,07           | 173,33                     | 26,03                      | <b>6444</b>               | <b>6,66</b>               | <b>38,00</b>                       | -                                       |
| 20,69         | 435,11         | 0,17           | 97,30                      | 43,46                      | <b>2559</b>               | <b>2,24</b>               | <b>20,00</b>                       | -                                       |
| 26,37         | 396,32         | 0,33           | 67,85                      | 51,99                      | <b>1200</b>               | <b>1,30</b>               | -                                  | <b>13,12</b>                            |
| 33,60         | 357,63         | 0,06           | 22,37                      | 1,79                       | <b>5960</b>               | <b>12,50</b>              | <b>6,23</b>                        | -                                       |
| 42,81         | 343,03         | 0,03           | 16,44                      | 0,50                       | <b>11434</b>              | <b>32,88</b>              | <b>4,79</b>                        | -                                       |
| 54,56         | 328,85         | 0,02           | 4,17                       | 0,58                       | <b>16442</b>              | <b>7,19</b>               | <b>1,26</b>                        | -                                       |
| 69,52         | 295,71         | 0,15           | 5,11                       | 0,22                       | <b>1971</b>               | <b>23,23</b>              | <b>1,73</b>                        | -                                       |
| 88,59         | 234,26         | 0,03           | 1,42                       | 0,18                       | <b>7808</b>               | <b>7,89</b>               | <b>0,60</b>                        | -                                       |
| 112,88        | 179,06         | 0,05           | 0,56                       | 0,15                       | <b>3581</b>               | <b>3,73</b>               | <b>0,30</b>                        | -                                       |
| 143,84        | 134,47         | 0,02           | 0,31                       | 0,16                       | <b>6723</b>               | <b>1,94</b>               | -                                  | <b>0,12</b>                             |
| 183,30        | 102,81         | 0,01           | 0,15                       | 0,12                       | <b>10281</b>              | <b>1,25</b>               | -                                  | <b>0,12</b>                             |
| 233,57        | 79,91          | 0,01           | 0,14                       | 0,17                       | <b>7991</b>               | <b>0,82</b>               | -                                  | <b>0,21</b>                             |
| <b>297.63</b> | 62,94          | 0,01           | 0,15                       | 0,15                       | <b>6294</b>               | <b>1,00</b>               | -                                  | <b>0,24</b>                             |
| <b>379.27</b> | 49,84          | 0,01           | 0,15                       | 0,11                       | <b>4984</b>               | <b>1,36</b>               | -                                  | <b>0,22</b>                             |
| <b>483.29</b> | 39,15          | 0,01           | 0,30                       | 0,28                       | <b>3915</b>               | <b>1,07</b>               | -                                  | <b>0,72</b>                             |
| <b>615.85</b> | 29,85          | 0,01           | 0,12                       | 0,12                       | <b>2985</b>               | <b>1,00</b>               | -                                  | <b>0,40</b>                             |
| <b>784.76</b> | 21,44          | 0,01           | 0,12                       | 0,11                       | <b>2144</b>               | <b>1,09</b>               | -                                  | <b>0,51</b>                             |
| 1000          | 13,62          | 0,01           | 0,16                       | 0,13                       | <b>1362</b>               | <b>1,23</b>               | -                                  | <b>0,95</b>                             |



### Subiectul 3 (8p)

În tabelul 1 sunt prezentate rezultatele măsurării strălucirii câtorva stele și planete în unități de măsură arbitrară din spectrul vizibil, la diferite distanțe zenitale și în decursul unei singure nopți cu atmosferă stabilă și cer senin. Sunt de asemenea oferite magnitudinile vizuale aparente ale acestor stele în tabelul 2.

- Pe baza datelor, determinați valoarea extincției atmosferice la zenit. (4p)
- Care ar fi (în unitățile de măsură folosite) stălucirea unei stele cu magnitudinea vizuală aparentă 0 în absența extincției atmosferice? (2p)
- Determinați în funcție de aceste date magnitudinile vizuale aparente ale planetelor Venus și Jupiter în cazul lipsei extincției atmosferice. (2p)

| Număr cadru | Obiectul ceresc | Distanța zenitală (°) | Strălucire (unități arbitrară) |  |  |  |
|-------------|-----------------|-----------------------|--------------------------------|--|--|--|
| 1           | Vega            | 45,75                 | 5373                           |  |  |  |
| 1           | Deneb           | 23,86                 | 1777                           |  |  |  |
| 1           | Capella         | 55,94                 | 4885                           |  |  |  |
| 1           | Jupiter         | 70,92                 | 34167                          |  |  |  |
| 2           | Vega            | 49,89                 | 4892                           |  |  |  |
| 2           | Deneb           | 28,04                 | 1900                           |  |  |  |
| 2           | Capella         | 52,33                 | 4653                           |  |  |  |
| 2           | Jupiter         | 66,76                 | 34271                          |  |  |  |
| 2           | Aldebaran       | 68,98                 | 1802                           |  |  |  |
| 3           | Deneb           | 36,43                 | 1601                           |  |  |  |
| 3           | Capella         | 44,67                 | 5598                           |  |  |  |
| 3           | Jupiter         | 58,36                 | 37128                          |  |  |  |
| 3           | Aldebaran       | 60,65                 | 2032                           |  |  |  |
| 4           | Deneb           | 44,57                 | 1482                           |  |  |  |
| 4           | Capella         | 36,60                 | 5369                           |  |  |  |
| 4           | Jupiter         | 50,25                 | 40194                          |  |  |  |
| 4           | Aldebaran       | 52,82                 | 2044                           |  |  |  |
| 4           | Venus           | 70,95                 | 189588                         |  |  |  |

Tabel 1.

| Obiectul ceresc | Magnitudine (V) |
|-----------------|-----------------|
| Vega            | + 0,03          |
| Deneb           | + 1,25          |
| Capella         | + 0,08          |
| Aldebaran       | + 0,85          |

Tabel 2.

## Barem

a.

După cum se cunoaște, magnitudinea unei stele aflate la distanța zenitală  $z$  în condiții de atmosferă stabilă este:

$$m = m^0 + E \sec z,$$

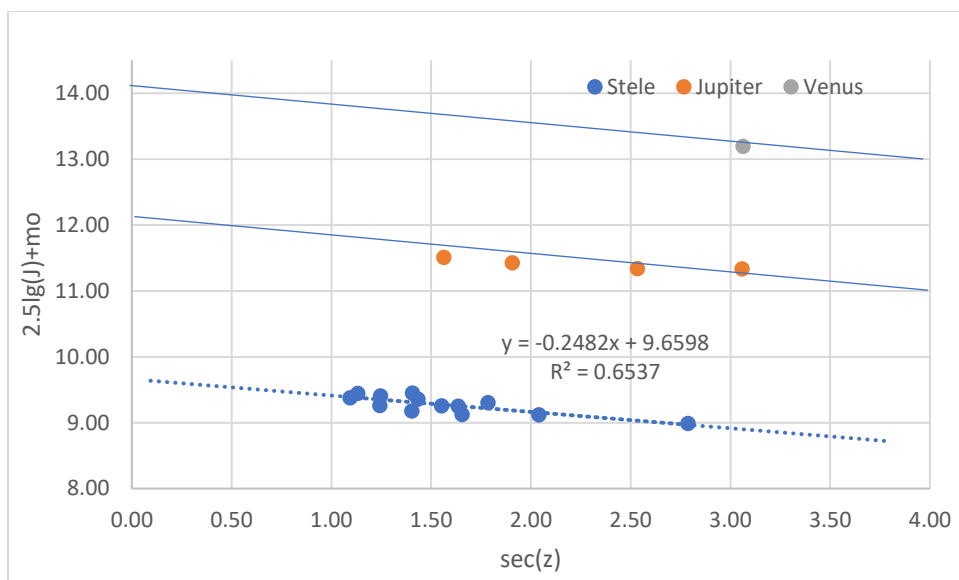
unde  $m^0$  - magnitudinea extraatmosferică (adevărată) a stelei,  $E$  - absorbția verticală a luminii la zenit în magnitudini stelare. Aplicând formula lui Pogson pentru magnitudinea  $m$ , găsim:

$2.5 \lg J + m^0 = 2.5 \lg J^0 - E \sec z$ , unde  $J$  - strălucirea măsurată a stelei,  $J^0$  - strălucirea stelei de magnitudine 0 în absența absorbției atmosferice și în aceleași unități de măsură ca mai înainte. Rescriem formula astfel:

$$2.5 \lg J + m^0 = 2.5 \lg J^0 - E \sec z \quad (0.5p)$$

Ambii termeni din partea stângă a formulei ne sunt cunoscuți pentru fiecare măsurătoare. Construim o diagramă care are pe axa Oy valorile din partea stângă a egalității, iar pe axa Ox valorile secantei distanței zenitale. (1.5p=30\*0.05p)

| Număr cadru | Obiectul ceresc | Distanța zenitală (°) | J (unități arbitrare) | sec(z) | 2.5lg(J) | 2.5lg(J)+m <sub>0</sub> |
|-------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|--------|----------|-------------------------|
| 1           | Vega            | 45,75                 | 5373                  | 1.43   | 9.33     | 9.36                    |
| 1           | Deneb           | 23,86                 | 1777                  | 1.09   | 8.12     | 9.37                    |
| 1           | Capella         | 55,94                 | 4885                  | 1.79   | 9.22     | 9.30                    |
| 1           | Jupiter         | 70,92                 | 34167                 | 3.06   | 11.33    |                         |
| 2           | Vega            | 49,89                 | 4892                  | 1.55   | 9.22     | 9.25                    |
| 2           | Deneb           | 28,04                 | 1900                  | 1.13   | 8.20     | 9.45                    |
| 2           | Capella         | 52,33                 | 4653                  | 1.64   | 9.17     | 9.25                    |
| 2           | Jupiter         | 66,76                 | 34271                 | 2.53   | 11.34    |                         |
| 2           | Aldebaran       | 68,98                 | 1802                  | 2.79   | 8.14     | 8.99                    |
| 3           | Deneb           | 36,43                 | 1601                  | 1.24   | 8.01     | 9.26                    |
| 3           | Capella         | 44,67                 | 5598                  | 1.41   | 9.37     | 9.45                    |
| 3           | Jupiter         | 58,36                 | 37128                 | 1.91   | 11.42    |                         |
| 3           | Aldebaran       | 60,65                 | 2032                  | 2.04   | 8.27     | 9.12                    |
| 4           | Deneb           | 44,57                 | 1482                  | 1.40   | 7.93     | 9.18                    |
| 4           | Capella         | 36,60                 | 5369                  | 1.25   | 9.32     | 9.40                    |
| 4           | Jupiter         | 50,25                 | 40194                 | 1.56   | 11.51    |                         |
| 4           | Aldebaran       | 52,82                 | 2044                  | 1.65   | 8.28     | 9.13                    |
| 4           | Venus           | 70,95                 | 189588                | 3.06   | 13.19    |                         |



Trasarea punctelor de pe grafic (1p)

Folosim metoda celor mai mici pătrate pentru a obține panta graficului și intersecția cu axa verticală. Obținem

$$E = 0.25 \pm 0.05 \text{ (1p)}$$

**b.**

$$2.5 \lg J_0 = 9.66 \pm 0.08$$

$$J_0 \in (6790, 7870) \text{ (1p)}$$

Dacă s-au determinat valorile altfel decât prin metoda celor mai mici pătrate se acordă maximum (0.5p) pentru valorile lui E respectiv  $J_0$  dacă valoarea obținută se află în intervalul de mai sus.

**c.**

Pentru determinarea magnitudinilor lui Venus și Jupiter reprezentăm valorile expresiei  $2,5 \cdot \lg J$  pe aceeași diagramă. (0.5p)

Lumina provenită de la Venus, respectiv Jupiter, este estompată de către atmosferă. Având în vedere aceasta, măsurarea strălucirii celor două planete se face după relația:

$$-2.5 \lg (J^{J,V} / J^0) - m^{J_0,V_0} = E \sec z$$

Aici,  $m^{J_0,V_0}$  este magnitudinea extraatmosferică a lui Jupiter și a lui Venus. Aceasta se poate scrie ca:

$$2.5 \lg J^{J,V} = 2.5 \lg J^0 - m^{J_0,V_0} - E \sec z$$

Relația dată se exprimă grafic prin drepte paralele cu aceea dusă pentru stele. Determinăm pe grafic coordonatele intersecției cu axa ordonatelor ( $2.5 \lg J^0, V^0$ ) și determinăm magnitudinile planetelor:

$$m^{J_0,V_0} = 2.5 \lg J^0 - 2.5 \lg J^{J_0,V_0} \text{ (0.5p)}$$

Pe grafic aceasta corespunde diferenței pe verticală între drepte (cu semn diferit). Magnitudinea lui Jupiter este -2,3 (0.5p), în timp ce a lui Venus este -4,3 (0.5p), ceea ce corespunde magnitudinilor lor adevărate din ziua observației.