

Soluții și bareme orientative

Clasa a XI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Suma elementelor de pe fiecare linie este: $P(z) = z^n + z^{n-1} + z + 1$. Se adună toate coloanele, 2, 3, ..., n la prima coloană, se scoate factor comun $P(z)$:

$$\Delta_n = P(z) \cdot \begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & 1+z^n \\ 1 & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & 1+z^{n-1} & z^n \\ 1 & z^2 & z^3 & \dots & 1+z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z^2 & 1+z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ 1 & 1+z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ 1 & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

(2p)

Se scade ultima linie la fiecare linie a determinantului, obținându-se:

$$\Delta_n = P(z) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

(2p)

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot P(z).$$

$$\Delta_n(z) = 0 \Leftrightarrow P(z) = 0 \text{ are soluțiile: } \varepsilon = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}, k = \overline{1, n}.$$

(3p)

2. Notăm cu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ verifică $X^{2n+1} = A$,

$$\text{atunci } XA = AX = X^{2n+2},$$

(1p)

$$\text{de unde rezultă printr-un calcul imediat că } x = t \text{ și } z = -y \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

(2p)

Fie numărul complex $z = x + iy = r(\cos t + i \sin t)$. Cum $X \neq O_2$ (deoarece $b \neq 0$), avem $z \neq 0$, deci $r > 0$. Atunci $X = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ **(1p)**

$$\text{și } X^{2n+1} = r^{2n+1} \begin{pmatrix} \cos(2n+1)t & \sin(2n+1)t \\ -\sin(2n+1)t & \cos(2n+1)t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \textbf{(1p)}$$

$$r^{2n+1} \cos(2n+1)t = a \text{ și}$$

$$r^{2n+1} \sin(2n+1)t = b \Leftrightarrow \textbf{(1p)}$$

$$r^{2n+1}(\cos(2n+1)t + i\sin(2n+1)t) = a + ib \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z^{2n+1} = a + ib$, ecuație binomă ce are $2n+1$ soluții distincte în $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ ecuația $X^{2n+1} = A$ are $2n+1$ soluții. **(1p)**

$$\begin{aligned} 3.a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n \cdot \left(\frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{-(n+1)^2} \right]^{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = e \cdot \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$

(3p)

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \cdot e_{n+1} - n \cdot e_n] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [e_{n+1} + n \cdot (e_{n+1} - e_n)] = \\ &= e + \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e_n \cdot \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 \right) = e + e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln e_{n+1}}{e_n}} - 1}{\frac{\ln e_{n+1}}{e_n}} \cdot \ln \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right) = e + e \cdot 1 \cdot \ln 1 = e. \end{aligned}$$

(4p)

4. Dacă $a = 0$, atunci funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$, verifică enunțul. **(2p)**

Înlocuim x cu $f(x) + x$ și pentru orice $x \in \mathbb{R}$, obținem:

$$f(f(f(x) + x) + f(x) + x) = a - f(f(x) + x) \Leftrightarrow f(x + a) = f(x),$$

ceea ce arată că f este periodică de perioadă $T = a$. **(2p)**

Dacă f nu este constantă, cum f este periodică, am obține că limita lui f la $\pm\infty$ nu ar exista (Demonstrație), ceea ce contrazice ipoteza. **(2p)**

Așadar f este constantă și atunci din prima relație din ipoteză obținem imediat că $a = 0$. **(1p)**