# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

## SUCEAVA, 16 februarie 2013

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat. Să se determine, după toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reale pozitive, valoarea minimă a sumei $S = \left[\frac{a_1 + a_2}{a_3}\right] + \left[\frac{a_2 + a_3}{a_4}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n + a_1}{a_2}\right]$.

*Marius Marchitan, Suceava*

***Soluție.***

Cum $[x] > x - 1$, pentru orice $x$ număr real, deducem că:

$$S > \frac{a_1 + a_2}{a_3} - 1 + \frac{a_2 + a_3}{a_4} - 1 + \ldots + \frac{a_n + a_1}{a_2} - 1 = \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_2}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_1}{a_2}\right) - n \geq$$

$$\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{a_2}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_2}} + n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1}{a_2}} - n = n + n - n = n.$$

Rezultă că $S > n$ și cum $S$ este număr natural, deducem că $S \geq n+1$. Pentru a arăta că valoarea minimă a sumei $S$ este $n+1$, rămâne să găsim un exemplu de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reale pozitive pentru care $S = n+1$.

Fie $a_1 = n^2 - (2n-3)$, iar următoarele $n-1$ numere le luăm consecutive:

$a_2 = n^2 - (n-2), a_3 = n^2 - (n-3), \ldots, a_{n-1} = n^2 - 1, a_n = n^2$. În continuare avem:

$$\left[\frac{a_1 + a_2}{a_3}\right] = \left[\frac{n^2 - (2n-3) + n^2 - (n-2)}{n^2 - (n-3)}\right] = \left[\frac{2n^2 - 3n + 5}{n^2 - n + 3}\right] = \left[1 + \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2 - n + 3}\right] = 1.$$

Pentru orice $k = \overline{2, n-2}$:

$$\left[\frac{a_k + a_{k+1}}{a_{k+2}}\right] = \left[\frac{n^2 - (n-k) + n^2 - (n-k-1)}{n^2 - (n-k-2)}\right] = \left[\frac{2n^2 - 2n + 2k + 1}{n^2 - n + k + 2}\right] = \left[1 + \frac{n^2 - n + k - 1}{n^2 - n + k + 2}\right] = 1.$$

Pentru penultimul termen al sumei găsim:

$$\left[\frac{a_{n-1} + a_n}{a_1}\right] = \left[\frac{n^2 - 1 + n^2}{n^2 - (2n-3)}\right] = \left[\frac{2n^2 - 1}{n^2 - 2n + 3}\right] = \left[2 + \frac{4n - 7}{n^2 - 2n + 3}\right] = 2,$$

deoarece $4n - 7 \geq 0$ și $4n - 7 < n^2 - 2n + 3 \Leftrightarrow 0 < (n-3)^2 + 1$. Ultimul termen al lui $S$ este:

$$\left[\frac{a_n + a_1}{a_2}\right] = \left[\frac{n^2 + n^2 - (2n-3)}{n^2 - (n-2)}\right] = \left[\frac{2n^2 - 2n + 3}{n^2 - n + 2}\right] = \left[1 + \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n + 2}\right] = 1.$$

Centralizând, găsim că $S = n+1$, aceasta reprezentând valoarea minimă a sumei $S$.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Enunță inegalitatea $[x] > x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ | 1 p |
| Deduce $S > \frac{a_1 + a_2}{a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_n + a_1}{a_2} - n$ | 1 p |
| Obține $S > n$ | 2 p |
| Deduce $S \geq n+1$ | 1 p |
| Justifică printr-un exemplu că valoarea minimă a lui $S$ este $n+1$ | 2 p |

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie impară şi crescătoare astfel încât $|f(x)| \geq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţi că $f^3(x) + f^3(y) \geq xy\left(f(x) + f(y)\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \geq 0$.

*Ion Bursuc, Suceava*

***Soluție*** Folosind formula $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$ deducem că inegalitatea din enunţ se scrie astfel:

$\left(f(x)+f(y)\right)\left(f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)\right)\geq xy\left(f(x)+f(y)\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$ cu $x+y\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(f(x)+f(y)\right)\left(f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)-xy\right)\geq 0, \forall x,y\in\mathbb{R}$ cu $x+y\geq 0$.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+y\geq 0$. Deoarece funcţia $f$ este impară şi crescătoare $\Rightarrow f(x)\geq f(-y)=-f(y)\Rightarrow f(x)+f(y)\geq 0$ (1).

Cum $|f(x)|\geq|x|, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f^2(x)\geq x^2, \forall x\in\mathbb{R}$ şi

$2\left(f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)-xy\right)=\left(f(x)-f(y)\right)^2+f^2(x)+f^2(y)-2xy\geq$

$f^2(x)+f^2(y)-2xy\geq x^2+y^2-2xy\geq 0, \forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)-xy\geq 0, \forall x,y\in\mathbb{R}$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea din enunţ .

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Rescrie inegalitatea cerută $\left(f(x)+f(y)\right)\left(f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)-xy\right)\geq 0$ | 2 p |
| Deduce $f(x)+f(y)\geq 0$ pentru $x,y\in\mathbb{R}$, $x+y\geq 0$ | 2 p |
| $\lvert f(x)\rvert\geq\lvert x\rvert,(\forall)x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f^2(x)\geq x^2,(\forall)x\in\mathbb{R}$ | 1 p |
| Demonstrează $f^2(x)+f^2(y)-f(x)f(y)-xy\geq 0,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$ | 2 p |

3. Se consideră numerele complexe $z_1$ şi $z_2$, $z_2\neq 0$. Ştiind că $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=0$, să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{|z_1|^x+|z_2|^x}{|z_1-z_2|^x}$.

*Dan Popescu, Suceava*

***<u>Soluţie.</u>*** Dacă $z_1=0$ atunci funcţia *f* este constantă. Fie $z_1\neq 0$.

$Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=0$ echivalează cu $\frac{z_1}{z_2}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{|z_2|^2}=0\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0.$

Apoi $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+|z_2|^2$.

Deducem că $\frac{|z_1|}{|z_1-z_2|},\frac{|z_2|}{|z_1-z_2|}\in(0,1)$.

Atunci avem $f(x)=\frac{|z_1|^x+|z_2|^x}{|z_1-z_2|^x}=\left(\frac{|z_1|}{|z_1-z_2|}\right)^x+\left(\frac{|z_2|}{|z_1-z_2|}\right)^x, \forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că funcţia f este strict descrescătoare, fiind o sumă de funcţii strict descrescătoare. În concluzie, f este funcţie descrescătoare pentru orice numerele complexe $z_1$ şi $z_2$, $z_2\neq 0$.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Consideră cazul $z_1=0$ | 1 p |
| Deduce $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ | 1 p |
| Demonstrează $\lvert z_1-z_2\rvert^2=\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2$ | 2 p |
| Deduce $\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_1-z_2\rvert},\frac{\lvert z_2\rvert}{\lvert z_1-z_2\rvert}\in(0,1)$ dacă $z_1\neq 0$ | 1 p |
| Finalizare f este funcţie descrescătoare | 2p |

4. Fie triunghiul $\Delta ABC$. În raport cu un reper cartezian cu originea în centrul cercului circumscris $\Delta ABC$, vârfurile $A,B,C$ au afixele $a,b$ respectiv $c$. Dacă ecuaţia $az^2+bz+c=0$ are o rădăcină de modul unu, demonstraţi că $\Delta ABC$ este isoscel.

*Anca Andrei, Suceava*

***Soluţie***. Din alegerea reperului rezultă că $|a|=|b|=|c|>0$. Fie $z_1, z_2$, rădăcinile ecuaţiei şi presupunem că $|z_1|=1$. Dar $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow |z_2|=1$ şi $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a} \Rightarrow |z_1+z_2|=1 \Rightarrow$

$$(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=1 \Rightarrow (z_1+z_2)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=1 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=z_1z_2 \Rightarrow b^2=ac \Rightarrow b^2-ba=ac-ba$$

$$\Rightarrow b(b-a)=a(c-b) \Rightarrow |b|\cdot|b-a|=|a|\cdot|c-b| \Rightarrow |b-a|=|c-b| \Rightarrow$$

$[AB]\equiv[BC] \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel.

***Barem.***

| | |
|---|---|
| Scrie $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=\lvert c\rvert>0$ | 1 p |
| Arată că ambele rădăcini au modul 1 | 1 p |
| Demonstrează că $b^2=ac$ | 3 p |
| Finalizare $\lvert b-a\rvert=\lvert c-b\rvert \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel | 2 p |

*Notă:*
*Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*