OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a IX-a

Problema 1

1. Demostraţi că pentru $\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}+\frac{2}{n+1} \in \mathbf{N}$.

Problemă selectată de Prof. Bathori Eva

2. Demostraţi că pentru $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \in \mathbf{N}$.

Problemă selectată de Prof. István Zoltán

Problema 2

Dacă ***x, y*** şi ***z*** sunt numere reale strict pozitive, arătaţi că următoarele inegalităţi sunt adevărate:

a) $\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{y+z}{(x+z)^2} \geq \frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}$.

b) $\frac{x+2y+z}{(x+z)^2}+\frac{x+y+2z}{(x+y)^2}+\frac{2x+y+z}{(y+z)^2} \geq 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$.

Problemă selectată de Prof. Pálhegyi Farkas László

Problema 3

Fie ABC un triunghi oarecare şi considerăm pe prelungirile laturilor AB, BC şi CA punctele E, F şi G $(B \in [AE], C \in [BF], A \in [CG])$, astfel încât să avem $\frac{AB}{BE}=\frac{BC}{CF}=\frac{CA}{AG}=k$. Fie M, N, K mijloacele segmentelor EF, FG şi GE. Demonstraţi că centrele de greutate a triunghiurilor ABC şi MNK coincid.

Problemă selectată de Prof. Pálhegyi Farkas László

Problema 4

Se dă un șir strict crescător de numere naturale pare. Arătați că în intervalul $[s_n;s_{n+1}]$ există cel puțin un pătrat perfect, unde s_n este suma primilor n termeni ai șirului dat și n>0.

Problemă selectată de Prof. Nicoară Florin

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea

Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com