INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024

Clasa a VI –a

Barem

Subiectul 1

Să se determine cifrele a,b,c ştiind că împărţind 2024 la $\overline{5a}$ se obţine câtul $\overline{3b}$ şi restul $\overline{2c}$, unde $\overline{2c}$ este număr prim.

Barem de corectare:

Din teorema împărţirii cu rest se obţine 2024 =$\overline{5a}$ × $\overline{3b}$ + $\overline{2c}$ şi din ipoteză c∈{3, 9}……..1p
Prin urmare, $\overline{5a}$ × $\overline{3b}$ =2001 sau $\overline{5a}$ × $\overline{3b}$ =1995……………………………………………1p
Dacă c = 3 atunci U (a ×b) = 1 ceea ce conduce la cazurile:
a=1, b=1, dar 51×31= 1581
a=3, b=7, dar 53×37=1961
a=7, b=3, dar 57×33=1881
a=9, b=9, dar 59×39=2301, deci nu există soluții…………………….…………….……..2p

Dacă c = 9 atunci U (a ×b) = 5 ceea ce conduce la cazurile:
a=5, dar 1995 nu se divide cu 55……………………….……………………………....1p
b=5 si 1995:35=57 ……………………….………………………………………………1p
Prin urmare soluţia problemei este: a=7, b=5, c=9…………….…………………………1p

Subiectul 2

Fie $a, b\ şi\ c$ trei numere naturale prime şi distincte, astfel ca $4a + 6b + 9c = 105$.

a) Determinaţi valorile lui $a, b\ şi\ c$.
b) Dacă n este un număr natural impar, atunci arătaţi că numărul $2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

Barem de corectare:

a) $a \vdots 3 \rightarrow a = 3$ 1p
$2b + 3c = 31 \rightarrow 3c \leq 31 \rightarrow c \in \{2; 3; 5; 7\}$ 1p
$c\ impar, c \neq a \rightarrow c \in \{5; 7\}$ 1p
$c = 5 \rightarrow b = 8$ compus
$c = 7 \rightarrow b = 5$

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

S: $a = 3; b = 5; c = 7$ 1p

b) $n = 2k + 1 \rightarrow\ 2^{n+c} - 2^{n+b} + 2^{n+a} =\ 2^{2k+8} - 2^{2k+6} + 2^{2k+4} =$.......................1p

$= 2^{2k+4}(2^4 - 2^2 + 1) = (2^{k+2})^2 \cdot 13 = (2^{k+2})^2 \cdot (2^2 + 3^2) =$ 1p

$= (2^{k+3})^2 + (2^{k+2} \cdot 3)^2$ 1p

Subiectul 3

În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ cu $m(\sphericalangle AOB) = 138^o$ și $m(\sphericalangle COD) = 122^o$. Știind că $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$, aflați:

a) măsura unghiului $\sphericalangle EOF$;

b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ dacă semidreapta opusă semidreptei $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOF$.

Barem de corectare:

a) $\sphericalangle AOB +\ \sphericalangle BOC +\ \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA = 360^o =>$

$\sphericalangle AOD +\ \sphericalangle BOC = 360^o - (138 + 122^o) = 100^o$ 1p

$\sphericalangle EOF = \sphericalangle EOD + \sphericalangle DOC + \sphericalangle COF =$

$= \frac{\sphericalangle AOD}{2} + \sphericalangle DOC + \frac{\sphericalangle COB}{2} = \frac{\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC}{2} + \sphericalangle DOC =$ 1p

$= \frac{100^O}{2} + 122^O =\ 50^O + 122^O = 172^O$ 1p

b) [OE, [OG semidrepte opuse $=>\ \sphericalangle EOG = 180^o$

$\sphericalangle EOG = \sphericalangle EOF + \sphericalangle FOG =>\ 180^o = 172^o + \sphericalangle FOG\ \ => \sphericalangle FOG = 8^o$ 1p

OG bisect. $\sphericalangle BOF\ \ =>\ \sphericalangle BOF = 2 \cdot\ \sphericalangle FOG = 2 \cdot 8^o = 16^o$ 1p

OF bisect. $\sphericalangle BOC\ \ =>\ \sphericalangle BOC = 2 \cdot\ \sphericalangle BOF = 2 \cdot 16^o = 32^o$ 1p

$\sphericalangle AOD +\ \sphericalangle BOC = 100^o\ (cf.a))\ \ =>\ \sphericalangle AOD = 100^o - 32^o = 68^o$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

Subiectul 4

Pe un cerc $C(O,r)$ se consideră punctele A, B şi C, astfel încât măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$şi $\widehat{CA}$ să fie invers proporționale cu numerele $6, 10$ şi 15.

(3p) a) Calculează măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$şi $\widehat{CA}$.

(2p) b) Pe arcul mic $\widehat{BC}$ se ia un punct D, astfel încât $\sphericalangle AOC = 4 \cdot \sphericalangle COD$. Demonstrează că unghiul AOD este unghi drept.

(2p) c) Calculează măsurile unghiurilor BOD, BOC şi AOC.

Barem de corectare:

a)

$\widehat{AB}$ ·6 = ,$\widehat{BC}$·10= $\widehat{CA}$·15=k => $\widehat{AB}$= $\frac{K}{6}$, $\widehat{BC}$= $\frac{K}{10}$, $\widehat{CA}$= $\frac{K}{15}$, ………………………..……1p

Dar, $\widehat{AB} + \widehat{BC}$+ $\widehat{CA}$= 360º => k=1080 ……………………………………………………..1p

=> $\widehat{AB}$ =180º, ,$\widehat{BC} = 108°$, $\widehat{CA} = 72°$……………………………………….……………..1p

b) Din $\widehat{CA} = 72°$ => ∡AOC=72°……………………………………………………….1p

∡COD = 18° => ∡AOD=90°…………………………………………………………1p

c) ∡BOD=90°, ∡BOC=108°, ∡AOC=72°………………………………………………2p