

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Determinați $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$a\sqrt{2012 - 2\sqrt{2011}} + \sqrt{2015 - 4\sqrt{2011}} \in \mathbb{Q}.$$

(Gazeta Matematică)

Problema 2. Aflați numerele reale x , pentru care $|x - 1| + |2 - x| + |x - 3| + |4 - x| + \dots + |2012 - x| + |x - 2013| = 2014(x - 2014)$.

(Gazeta Matematică)

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care triunghiurile ABC , ACD și BDC au arii egale. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă triunghiurile ABC și BDC au și perimetre egale, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Problema 4. Se consideră un punct M în planul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M față de A , P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C .

a) Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D și că D este mijlocul segmentului $[MQ]$;

b) Unde trebuie să se afle punctul M pentru ca $MNQP$ să fie trapez ?
(Gh. Țițeica, Culegere de probleme)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;

Timp de lucru: 3 ore.

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluții

Problema 1. $\sqrt{2012 - 2\sqrt{2011}} = \sqrt{2011} - 1$, $\sqrt{2015 - 4\sqrt{2011}} = \sqrt{2011} - 2$,
Determinăm $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a(\sqrt{2011} - 1) + \sqrt{2011} - 2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2011}(a + 1) - a - 2 \in \mathbb{Q}$.

Deoarece 2011 este număr prim $\Rightarrow \sqrt{2011} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Deducem $a = -1$.

Problema 2.

Deoarece $|x - 1|, |2 - x|, |x - 3|, |4 - x|, \dots, |2012 - x|, |x - 2013| \geq 0$

$\Rightarrow |x - 1| + |2 - x| + |x - 3| + |4 - x| + \dots + |2012 - x| + |x - 2013| \geq 0 \Rightarrow$
 $2014(x - 2014) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2014$.

Deducem că $|x - 1| = x - 1, |2 - x| = x - 2, |x - 3| = x - 3, |4 - x| =$
 $x - 4, \dots, |2012 - x| = x - 2012, |x - 2013| = x - 2013$.

Ecuția dată devine $2013x - 2013 \cdot 1007 = 2014x - 2014^2 \Rightarrow x = 1007 \cdot 2015$.

Problema 3. $A_{ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2}$, $A_{BDC} = \frac{d(D, BC) \cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC} =$
 $A_{BDC} \Rightarrow d(A, BC) = d(D, BC) \Rightarrow AD \parallel BC$ (deoarece A, D aparțin aceleiași

semiplan determinat de BC);
 $A_{ACD} = \frac{d(A, CD) \cdot CD}{2}$, $A_{BDC} = \frac{d(B, CD) \cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD} = A_{BDC} \Rightarrow$
 $d(A, DC) = d(B, DC) \Rightarrow AB \parallel CD$ (deoarece A, B aparțin aceleiași semi-

plan determinat de DC);

Deducem că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă în plus, $P_{ABC} = P_{BDC} \Rightarrow AB + BC + CA = DB + BC + CD \Rightarrow$
 $CA = DB$ (deoarece din $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow AB = CD$).

Deducem că $ABCD$ este dreptunghi.

Problema 4. a) Deducem că $NQ = 2BC$ și $NQ \parallel BC$;

Deoarece $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ = 2AD$ și $NQ \parallel AD$.

Cum A este mijlocul lui $MN \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ .

b) MP și NQ nu pot fi paralele între ele.

Pentru ca $MN \parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC' , unde C' este simetricul
lui C față de B .

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
 Clasa a VII-a
 Craiova, 9 februarie 2013
 Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu	1p
$\sqrt{2012 - 2\sqrt{2011}} = \sqrt{2011} - 1$	2p
$\sqrt{2015 - 4\sqrt{2011}} = \sqrt{2011} - 2$	2p
$\sqrt{2011}(a + 1) - a - 2 \in Q$	2p
2011 nr prim $\Rightarrow \sqrt{2011} \in R \setminus Q$	1.5p
$a = -1$	1.5p
Total	10p

Problema 2.

Oficiu	1p
$ x - 1 , 2 - x , x - 3 , 4 - x , \dots, 2012 - x , x - 2013 \geq 0 \Rightarrow$	1p
$ x - 1 + 2 - x + x - 3 + 4 - x + \dots + 2012 - x + x - 2013 \geq 0$	1p
$\Rightarrow 2014(x - 2014) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2014$	1p
$ x - 1 = x - 1, 2 - x = x - 2, x - 3 = x - 3, 4 - x = x - 4, \dots, 2012 - x =$ $x - 2012, x - 2013 = x - 2013$	2p
Ecuatia dată devine $2013x - 2013 \cdot 1007 = 2014x - 2014^2$	3p
$\Rightarrow x = 1007 \cdot 2015$	1p
Total	10p

Problema 3.

Oficiu	1p
$A_{ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2}, A_{BDC} = \frac{d(D, BC) \cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC} = A_{BDC} \Rightarrow$ $d(A, BC) = d(D, BC) \Rightarrow AD \parallel BC$	2p
$A_{ACD} = \frac{d(A, CD) \cdot CD}{2}, A_{BDC} = \frac{d(B, CD) \cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD} = A_{BDC} \Rightarrow$ $d(A, CD) = d(B, CD) \Rightarrow AB \parallel CD$	2p
$AD \parallel BC, AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ este paralelogram	1p
$P_{ABC} = P_{BDC} \Rightarrow AB + BC + CA = DB + BC + CD$	2p
$\Rightarrow CA = DB \Rightarrow ABCD$ este dreptunghi	2p
Total	10p

Problema 4.

Oficiu	1p
a) $NQ = 2BC$ și $NQ \parallel BC$;	1p
$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ = 2AD$ și $NQ \parallel AD$.	1p
A este mijlocul lui $MN \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ .	2p
b) MP și NQ nu pot fi paralele între ele.	2p
Pentru ca $MN \parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC' , unde C' este simetricul lui C față de B	3p
Total	10p